



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

“EL PÉNDULO ESFÉRICO COMO EJEMPLO DE UN
SISTEMA HAMILTONIANO INTEGRABLE CLÁSICO”

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE :
F Í S I C O
P R E S E N T A :

DANIEL VALERIO MARTÍNEZ



FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

Tutor: Dr. Antonio Hernández Garduño

2006

Índice general

1. Introducción	3
1.1. Variedades diferenciables	4
1.2. Teoría de Morse	14
1.3. Álgebra y geometría simpléctica	19
1.4. Grupos y álgebras de Lie	22
1.5. Mapeos de momento	29
1.6. Dinámica Hamiltoniana	31
1.7. Estructura de la tesis	35
2. Dinámica y simetría del péndulo esférico	37
2.1. Hamiltoniano Constreñido	37
2.2. El mapeo de momento J	45
3. Reducción de la simetría S^1	51
3.1. El espacio reducido M_j	53
3.2. El hamiltoniano reducido H_j	57
4. La función de Energía-Momento $\mathcal{E}\mathcal{M}$	60
4.1. Valores críticos	61
4.2. Topología de $H_j^{-1}(h)$	76

4.3. Topología de $\mathcal{EM}^{-1}(h, j)$	82
4.4. Topología de $(H TS^2)^{-1}(h)$	105
5. Conclusiones	117

Capítulo 1

Introducción

Pareciera ser que en la actualidad, la mecánica clásica es una materia ya del pasado, es decir, se ha dicho ya casi todo, se conocen muchas soluciones de los problemas mecánicos existentes. Pero esto no es del todo cierto, puesto que con los nuevos avances de la matemática esta área de la física ha de nuevo resurgido, en ella se incorporarán principalmente elementos de la geometría diferencial, la cual a su vez reúne elementos de álgebra lineal avanzados.

Una muestra de ello es por ejemplo el concepto de **variedad simpléctica**, el cual es simplemente el espacio fase de un sistema mecánico, por otro lado el **espacio de configuración** es el conjunto de posibles posiciones. En la mecánica clásica existen principalmente dos formulaciones: la **formulación Lagrangiana** y la **formulación Hamiltoniana**. En general, para un sistema de N partículas moviéndose en el espacio 3-D euclidiano, elegimos el espacio de configuración a ser $Q = \mathbb{R}^{3N}$. En la mecánica Lagrangiana, uno identifica el espacio de configuración Q y entonces se forma el espacio fase de velocidades TQ , también llamado el **haz tangente** de Q . Entonces el Lagrangiano se mira como una función $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$. Asociado a cualquier espacio de configuración Q hay un espacio fase T^*Q llamado

el **haz cotangente** de Q .

El ejemplo anterior es una muestra de como los elementos de geometría diferencial se incorporan a la mecánica clásica y la hacen una teoría mas completa e interesante. Por lo tanto, parte de esta tesis es mostrar las actuales herramientas matemáticas que se utilizan en el área de la mecánica clásica. En particular nosotros estudiamos el péndulo esférico y sobre este sistema nosotros describimos su dinámica, su simetría, la reducción de este sistema a un sistema con un solo grado de libertad al cual llamamos el espacio fase reducido, y lo más importante de este sistema es la topología que encontramos dadas las funciones de energía y de energía-momento. En todos estos temas nosotros hacemos uso de conceptos geométricos para describir la mecánica del sistema. La tesis se desarrolla con la finalidad de que los estudiantes de física encuentren una motivación para seguir adentrándose en la mecánica clásica, las definiciones y proposiciones que aquí se utilizan sirven como base para otras áreas de la física tales como relatividad y mecánica cuántica por ejemplo.

1.1. Variedades diferenciables

Introducimos a continuación nociones básicas sobre variedades diferenciales. En esta sección nos basamos principalmente en Gidea [10] y Talpaert [16].

Definición 1.1. *Una función f de un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ es **suave** si tiene derivadas parciales continuas de todos los ordenes para toda $u \in U$.*

Definición 1.2. *Un espacio topológico es un conjunto X junto con una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X satisfaciendo las siguientes propiedades: i) el conjunto vacío $\emptyset$ y el espacio total X están en $\mathcal{A}$, ii) la unión de cualquier colección (posiblemente*

infinita) de conjuntos en $\mathcal{A}$ es un conjunto en $\mathcal{A}$ y iii) la intersección de cualquier colección finita de conjuntos en $\mathcal{A}$ es un conjunto en $\mathcal{A}$.

Los conjuntos en $\mathcal{A}$ son llamados los conjuntos abiertos del espacio topológico. La colección $\mathcal{A}$ de todos los conjuntos es referido como la **topología** sobre X .

Ejemplo 1.1.1. Sea X un espacio topológico y $\sim$ una relación de equivalencia sobre X . Definimos el conjunto cociente $X/\sim$ como el conjunto de todas las clases de equivalencia sobre X , y la proyección canónica $\pi : X \rightarrow X/\sim$ tal que cada elemento $x \in X$ lo manda a su clase de equivalencia $[x] \in X/\sim$. El conjunto de todas las $U \subseteq X/\sim$ para las cuales $\pi^{-1}(U)$ es un conjunto abierto en X define una topología sobre $X/\sim$ llamada la topología cociente.

Una **base** para la topología $\mathcal{A}$ de X es una colección $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ de conjuntos abiertos con la propiedad de que cada conjunto en $\mathcal{A}$ puede ser obtenido como una unión de conjuntos en $\mathcal{B}$.

Proposición 1.3. Sean X y $Y = X/\sim$ espacios topológicos como en el ejemplo anterior y sea λ la siguiente función $\lambda : X \rightarrow Y : x \mapsto [x]$. Sea W un espacio topológico y $\pi : X \rightarrow W$ la función que es constante sobre cada conjunto $\lambda^{-1}(\{y\})$, para toda $y \in Y$. Entonces π induce una función $\sigma : Y \rightarrow W$ tal que $\sigma \circ \lambda = \pi$. La función σ inducida es continua si y solo si π es continua.

Prueba. Ver Munkres [14]. ■

Definición 1.4. Una variedad suave de dimensión m es un conjunto M junto con una colección de funciones $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow M\}$, con cada U_α un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^m$, satisfaciendo las siguientes condiciones:

1. Cada función $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha = \varphi_\alpha(U_\alpha)$ es inyectivo

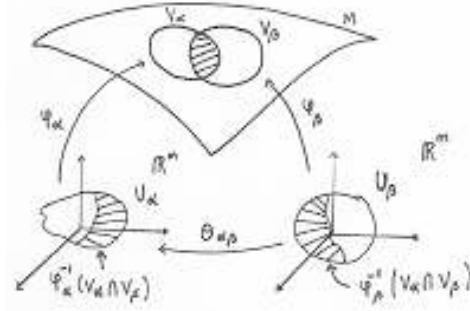


Figura 1.1: Variedad diferenciable.

2. Si $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$ entonces existe una función suave

$$\theta_{\alpha\beta} : \varphi_\beta^{-1}(V_\alpha \cap V_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha^{-1}(V_\alpha \cap V_\beta)$$

tal que $\varphi_\beta = \varphi_\alpha \circ \theta_{\alpha\beta}$

3. $M = \bigcup \varphi(U_\alpha)$

Las funciones $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ son llamadas **parametrizaciones locales**, y $\mathbb{R}^m$ es referido como el espacio parámetro. Las coordenadas $(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ correspondiendo directamente a φ_α^{-1} de un punto $p \in V_\alpha$ son llamados las **coordenadas locales** de p , y la función inversa $\varphi_\alpha^{-1} : V_\alpha \rightarrow U_\alpha$ es llamada un **sistema o carta coordenada**. Ver figura 1.1. La primera condición de la definición anterior implica que M es localmente homeomorfo al espacio euclidiano de dimensión m . La segunda condición dice que si las imágenes de φ_α y φ_β se traslapan, entonces φ_β resulta de φ_α por un cambio de coordenadas suave.

Cuando dos sistemas coordenados locales satisfacen la condición 2, entonces se dice que son **compatibles**.

Definición 1.5. Sea $f : M \rightarrow N$ la función que va de la variedad M de dimensión m a la variedad N de dimensión n . Decimos que f es diferenciable si para cada

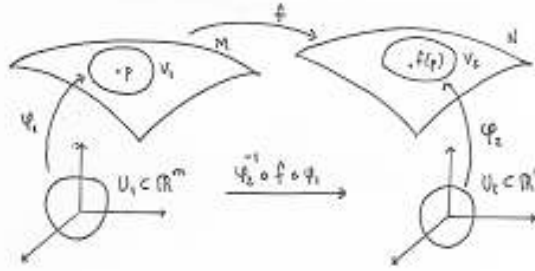


Figura 1.2: Función diferenciable.

punto $p \in M$ existe una parametrización local $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ para M y $p \in V_1$, y una parametrización local $\varphi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ para N y $f(p) \in V_2$ tal que $\varphi_2^{-1} \circ f \circ \varphi_1$ es diferenciable en $\varphi_1^{-1}(p)$. Ver figura 1.2.

La función $\varphi_2^{-1} \circ f \circ \varphi_1$ se define sobre $\varphi_1^{-1}(f^{-1}(V_2 \cap f(V_1))) \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^m$ y toma valores en $\varphi_2^{-1}(V_2 \cap f(V_1)) \subseteq U_2 \subseteq \mathbb{R}^n$.

Decimos que f es C^k diferenciable si $\varphi_2^{-1} \circ f \circ \varphi_1$ es C^k diferenciable para cualquier elección de φ_1 y φ_2 .

Sea M una variedad suave de dimensión m . Una *curva* suave c en M es una función diferenciable $c : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$, con I algún intervalo abierto de los números reales. Esto es, dada una parametrización local $\varphi : U \rightarrow V$ con V conteniendo alguna porción de c , jalar atrás la curva $\varphi^{-1}(c(t))$ es una curva diferenciable en $U \subseteq \mathbb{R}^m$. Fijamos un punto $p \in M$ y consideremos dos curvas c_1 y c_2 pasando a través de p en $t = 0$. Sea $\varphi : U \rightarrow V$ una parametrización local cerca de p . Entonces $\varphi^{-1} \circ c_1$ y $\varphi^{-1} \circ c_2$ son dos curvas suaves en $U \subseteq \mathbb{R}^m$, pasando a través de $\varphi^{-1}(p)$ en $t = 0$. Si ellos tienen el mismo vector tangente en este punto común, es decir, si $(\varphi^{-1} \circ c_1)'(0) = (\varphi^{-1} \circ c_2)'(0)$, entonces decimos que c_1 y c_2 son equivalentes en p .

Definición 1.6. Un vector tangente v a una superficie suave M en un punto p , es una clase de equivalencia de curvas c en M , pasando a través del punto p en

$t = 0$, y para los cuales $(\varphi^{-1} \circ c)'(0)$ representa el mismo vector $(v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^m$, con respecto a alguna parametrización local $\varphi : U \rightarrow V$ cerca de p .

Denotamos el vector tangente v determinado por la clase de equivalencia de c por $\frac{d}{dt}c(0) = c'(0)$. Denotamos al conjunto de todos los vectores tangentes a M en p por T_pM . Dado un conjunto de vectores tangentes a M se tiene la siguiente:

Proposición 1.7. *El espacio tangente T_pM , endosado con operaciones de adición y multiplicación por escalar es un espacio vectorial de dimensión m . Una base de vectores de este espacio es $\frac{\partial}{\partial x_1}\big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}\big|_p$, definido con respecto a alguna parametrización local φ cerca de p .*

Prueba. Ver Gidea [10]. ■

Ahora consideremos el **haz tangente** TM , el cual consiste de todos los espacios tangentes en puntos de M pegados de una manera natural, esto es $TM = \bigcup T_pM = \bigcup \{p\} \times T_pM$.

Proposición 1.8. *El haz tangente TM naturalmente tiene la estructura de una variedad de dimensión $2m$.*

Prueba. Ver Yves Talpaert [16, secc. 4.2]. ■

Dada una función suave $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, un punto p sobre M , y un vector tangente v a M en p , buscamos definir la derivada de f en la dirección de v en p . Sea c una de las curvas con $c(0) = p$ tal que representa a v . La derivada de f en la dirección de v se define por $v[f](p) = \frac{d}{dt}f(c(t))\big|_{t=0}$.

La derivada de una función suave en un punto representa una aproximación lineal de la función cerca del punto. Sea f una función suave de la variedad M de dimensión m a la variedad N de dimensión n .

Definición 1.9. La derivada de f en un punto $p \in M$ es la función $(df)_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ definida por

$$(df)_p \left(\frac{d}{dt} c(0) \right) = \frac{d}{dt} (f \circ c)(0)$$

donde $c : I \rightarrow M$ es una curva suave con $c(0) = p$, y $\frac{d}{dt} (f \circ c)(0)$ representa a un vector tangente a N en $f(p)$, puesto que $f \circ c : I \rightarrow N$ es una curva suave en N con $(f \circ c)(0) = f(p)$.

Aplicando $(df)_p$ a los vectores de la base usual $\frac{\partial}{\partial x_1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}|_p$ de $T_p M$, obtenemos los vectores $(df)_p \left(\frac{\partial}{\partial x_1}|_p \right), \dots, (df)_p \left(\frac{\partial}{\partial x_m}|_p \right)$ en $T_{f(p)} N$. Expresamos estos vectores como combinaciones lineales de la base $\frac{\partial}{\partial y_1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}|_p$ de $T_p M$ como

$$(df)_p \left(\frac{\partial}{\partial x_j}|_p \right) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \frac{\partial}{\partial y_i}|_{f(p)}$$

para toda $j = 1, \dots, m$. La matriz $n \times m$ hecha con estos coeficientes $(Jf)_p = (a_{ij}), i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$ es llamada la matriz Jacobiana de f en p . Los vectores $(df)_p \left(\frac{\partial}{\partial x_j}|_p \right), j = 1, \dots, m$ serán una base de $T_{f(p)} N$ si y solo si $m = n$ y la matriz $(Jf)_p$ es invertible.

Si M y N son dos variedades suaves de la misma dimensión, la función suave $f : M \rightarrow N$ se dice un **difeomorfismo local** en $p \in M$ si f toma alguna vecindad abierta V de p difeomorfa sobre alguna vecindad abierta W de $f(p)$.

Definición 1.10. Supongase que M es una variedad suave de dimensión m , N es una variedad suave de dimensión n , y $f : M \rightarrow N$ una función suave.

1. La función f se dice una **inmersión** si $(df)_p$ es inyectiva en cada punto p .

Esto es, el rango del jacobiano $(Jf)_p$ es igual a m en cada punto $p \in M$.

2. La función f se dice un **encaje** si f es una inmersión y f define un homeomorfismo de M a $f(M)$ (con la topología inducida de N).

3. La función f es una **sumersión** si $(df)_p$ es suprayectiva en cada punto p .
 Esto es, el rango del jacobiano $(Jf)_p$ es igual a n en cada punto $p \in M$.

Notemos que para una inmersión se debe tener que $\dim M \leq \dim N$ y que para una sumersión se debe tener que $\dim M \geq \dim N$.

Ejemplo 1.1.2. Sea $M = \mathbb{R}^m$ y $N = \mathbb{R}^n$. Si $m \leq n$, la transformación

$$(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mapsto (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$$

es una inmersión (llamada la inmersión canónica), y también un encaje. Si $m \geq n$, la transformación

$$(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mapsto (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

es una sumersión (llamada la sumersión canónica).

Definición 1.11. La fibra de una función $\varphi : M \rightarrow N$ es el conjunto $\varphi^{-1}(x)$, siendo x un punto dado en el rango de φ .

Proposición 1.12. Sean M, N variedades de dimensiones m y n respectivamente y $\varphi : M \rightarrow N$ una sumersión:

1. Si $m = n$, cada fibra de φ es un conjunto de puntos discretos.
2. Si $m \geq n$, cada fibra tiene la estructura de una subvariedad regular de M de dimensión $m - n$.

Prueba. Ver Brickell [3, cap. 2]. ■

Definición 1.13. Sea f la función suave de la variedad M de dimensión m a la variedad N de dimensión n .

1. Un punto p en M se dice un **punto crítico** de f si la derivada $(df)_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ no es suprayectiva. Esto es, el rango de la matriz Jacobiana $(Jf)_p$ es menor que la dimensión n de N . La imagen $f(p)$ de un punto crítico es llamado un **valor crítico** de f .
2. Un punto p en M se dice un **punto regular** de f si este no es crítico. Un punto q en N se dice un **valor regular** de f si su imagen inversa $f^{-1}(q)$ no contiene puntos críticos.

Si la dimensión de M es más pequeña que la dimensión de N , entonces todos los puntos de M son puntos críticos para f . Por otro lado, si $f(M)$ no es todo N , entonces todos los puntos de $N \setminus f(M)$ son valores regulares, puesto que sus imágenes inversas son vacías.

Proposición 1.14. (*Imagen inversa de un valor regular*) La imagen inversa $f^{-1}(q)$ de un valor regular $q \in N$ de una función suave $f : M \rightarrow N$ es una subvariedad de dimensión $m - n$ de M .

Prueba. (Siguiendo a Gidea [10, secc. 1.10]) Para un punto dado $p \in f^{-1}(q)$, y utilizando el teorema de sumersión (ver [10, secc. 1.9]) podemos elegir parametrizaciones locales φ_1 cerca de p y φ_2 cerca de q tal que

$$\varphi_2^{-1} \circ f \circ \varphi_1(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_n)$$

y las coordenadas locales de p y q son cero. Los puntos $p' \in f^{-1}(q)$ tienen coordenadas locales $(0, \dots, 0, x_{n+1}, \dots, x_m)$. Por lo tanto podemos definir una parametrización local $\varphi' : U \cap (0 \times \mathbb{R}^{m-n}) \rightarrow V \cap f^{-1}(q)$ sobre $f^{-1}(q)$, cerca de p , por

$$\varphi'(x_{n+1}, \dots, x_m) = \varphi_1(0, \dots, 0, x_{n+1}, \dots, x_m)$$

De esta forma obtenemos una estructura suave sobre $f^{-1}(q)$, inducida por la estructura suave sobre M , el cual hace que $f^{-1}(q)$ sea una subvariedad de dimensión $m - n$. ■

Definición 1.15. Una sección S de clase C^k del haz tangente TM es la función S de clase C^k de M en TM tal que la composición de S con la proyección del haz tangente $\Pi_M : TM \rightarrow M : (x, X_x) \mapsto x$ es la identidad sobre M , es decir, $\Pi_M \circ S = \text{id}_M$.

Definición 1.16. Un campo vectorial (tangente) sobre M es una transformación

$$X : M \rightarrow TM : x \mapsto X(x) = (x, X_x),$$

el cual asigna a cada punto $x \in M$ un vector tangente en el punto x . Un campo vectorial es diferenciable si la transformación que lo define es de clase C^∞ .

La colección de campos vectoriales diferenciables es denotada por $\mathcal{X}(M)$.

Observación Un campo vectorial X sobre M es una sección de TM . En efecto, la transformación $X : M \rightarrow TM$ tal que $s \circ X : M \rightarrow M : x \mapsto s(X(x)) = x$, donde s es la proyección de TM .

Definición 1.17. Consideremos $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. El producto de campos vectoriales X y Y es un operador definido por

$$\forall g \in C^\infty(M) : (XY)g = X(Yg).$$

El producto de campos vectoriales no es un campo vectorial diferenciable.

Definición 1.18. Una curva integral de X con condición inicial m_0 en $t = 0$ es una curva diferenciable $c : (a, b) \rightarrow M$ tal que (a, b) es un intervalo abierto conteniendo al cero, $c(0) = m_0$ y $c'(t) = X(c(t))$ para toda $t \in (a, b)$.

Definición 1.19. El flujo de X es la colección de funciones $\varphi_t : M \rightarrow M$ tal que $t \rightarrow \varphi_t(m)$ es la curva integral de X con condición inicial m .

El teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales garantiza que φ es suave en m y en t si el campo vectorial X lo es. Además de la unicidad se tiene la propiedad de flujo, es decir, $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$.

Definición 1.20. El paréntesis es la transformación

$$[\] : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M) : (X, Y) \mapsto [X, Y] = XY - YX.$$

El paréntesis de campos vectoriales X y Y opera sobre $C^\infty(M)$, esto es

$$[X, Y] : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M) : g \mapsto [X, Y]g = X(Yg) - Y(Xg).$$

Además el paréntesis de campos vectoriales diferenciables también es un campo vectorial diferenciable.

Definición 1.21. Sean M una variedad suave, $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ y X un campo vectorial sobre M , definimos la derivada de Lie de f a lo largo del campo vectorial X como

$$\mathcal{L}_X f(x) = X(x)(f) = df_x(X(x))$$

Proposición 1.22. Sean $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$. Entonces

$$(\mathcal{L}_X)(f) = [X, Y](f)$$

y se satisface la identidad de Jacobi, es decir

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

Prueba. Ver Talpaert [16, secc. 3.2] ■

1.2. Teoría de Morse

Esta sección permite construir difeomorfismos alrededor de puntos críticos no degenerados de una variedad. La referencia principal viene dada por Cushman y Bates [6].

Sea M una variedad suave y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave. Supongase que $p \in M$ es un punto crítico de f . Definimos el **Hessiano** de f en p como sigue. Sea $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow M$ con $\varphi(0) = p$ una parametrización local de M . Entonces el Hessiano de f en p es la forma bilineal simétrica sobre el espacio tangente $T_p M$ dada por:

$$(\text{Hess}_p f)(v_p, w_p) = D^2(f \circ \varphi)(0)(v, w)$$

Aquí las curvas $t \rightarrow \varphi(tv)$ y $t \rightarrow \varphi(tw)$ representan los vectores tangentes v_p y w_p a M en p .

Definición 1.23. Supongase que x es un punto crítico de una función suave $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces el Hessiano de f en x , es la transformación bilineal simétrica $D^2 f(x)$ donde

$$D^2 f(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \text{Sim}_m(\mathbb{R}) : x \mapsto \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)$$

Si la matriz $D^2 f(x)_{(m \times m)}$ es invertible, entonces x es un **punto crítico no degenerado** de f . Si todos los puntos críticos de f son no degenerados, entonces f

es una **función de morse**.

Puesto que la matriz hessiana es simétrica, esta puede ser diagonalizada por un cambio de coordenadas lineal y ortogonal, las cuales pueden ser además reescaladas para dar una matriz diagonal donde todas las entradas de la diagonal sean ± 1 . Los **invariantes** del Hessiano tales como su **no degeneración** (su invertibilidad), su **índice de Morse** (número de eigenvalores negativos) y su **signatura** (la diferencia de sus eigenvalores positivos y negativos), no dependen de la elección de la parametrización.

Proposición 1.24. *Sea p un punto crítico no degenerado de $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces hay un sistema de coordenadas local $(y_1, \dots, y_m)$ sobre una vecindad de p (posiblemente pequeña) tal que sobre esta vecindad*

$$f(y_1, \dots, y_m) = f(p) - y_1^2 - \dots - y_\lambda^2 + y_{\lambda+1}^2 + \dots + y_m^2 \quad (1.1)$$

donde λ es el índice del punto crítico p .

Prueba. Ver Barden [2, secc. 7.5] . ■

Entonces dependiendo de que valores tome el índice de Morse tendremos un hiperboloide de revolución (hacia arriba o hacia abajo) o una silla de montar.

Corolario 1.25. *Si V es otro subconjunto abierto de $\mathbb{R}^m$ y $\phi : V \rightarrow U$ es un difeomorfismo con $\phi(q) = p$, entonces $g = f \circ \phi$ tiene un punto crítico no degenerado en q con el mismo índice que en p*

Prueba. Por la regla de la cadena $Dg(x) = Df(\phi(x))D\phi(x)$, puesto que $D\phi(x)$ es no singular en V , $Dg(x) = 0$ si y solo si $Df(\phi(x)) = 0$. Si $\psi : W \rightarrow U$ es un cambio de coordenadas tal que $\psi(0) = p$ y $H(f \circ \psi)(0)$ es diagonal entonces $\phi^{-1} \circ \psi$

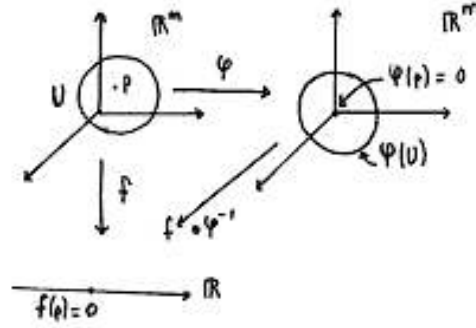


Figura 1.3: Lema de Morse.

mapea el 0 a q y transforma $Hg(0)$ a la forma diagonal identidad. Entonces los índices concuerdan en los dos puntos críticos. ■

Definición 1.26. Dado p un punto crítico no degenerado de índice k para una función f sobre M , la carta $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $\phi(p) = 0$ y

$$f \circ \phi^{-1}(y_1, \dots, y_m) = f(p) - y_1^2 - \dots - y_k^2 + y_{k+1}^2 + \dots + y_m^2$$

es llamada una carta de Morse.

Proposición 1.27. (Lema de Morse). Supongase que p es un punto crítico no degenerado de una función suave $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(p) = 0$. Entonces hay un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^m$ con $p \in U$ y un difeomorfismo $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ con $\varphi(p) = 0$ tal que

$$f \circ \varphi^{-1}(y) = \frac{1}{2} D^2 f(p)(y, y), \quad \forall y \in \varphi(U) \quad (1.2)$$

donde

$$D^2 f(0)(y, y) := (y_1, y_2) (D^2 f(0)) (y_1, y_2)^T \quad (1.3)$$

donde T significa la transpuesta de la matriz. Ver figura 1.3.

Prueba. Ver Cushman y Bates [6, apéndice E.2] ■

Proposición 1.28. *Dadas las condiciones de la proposición 1.27 la siguiente igualdad de conjuntos se sigue:*

$$\varphi(f^{-1}(\epsilon) \cap U_0) = (f \circ \varphi^{-1})^{-1}(\epsilon) \quad (1.4)$$

Prueba. $\Rightarrow$ Sea $z \in \varphi(f^{-1}(\epsilon) \cap U_0)$, entonces $(x, y) \in (f^{-1}(\epsilon) \cap U_0)$ y $\varphi(x, y) = z$. Dado que $(x, y) \in f^{-1}(\epsilon)$ entonces $f(x, y) = \epsilon = f(\varphi^{-1}(z)) = (f \circ \varphi^{-1})(z)$. Por lo tanto $z \in (f \circ \varphi^{-1})^{-1}(\epsilon)$. En términos estrictamente de conjuntos tenemos la siguiente cadena de igualdades $\varphi(f^{-1}(\epsilon) \cap U_0) \subseteq \varphi(f^{-1}(\epsilon)) \cap \varphi(U_0) = \varphi(f^{-1}(\epsilon)) = (\varphi \circ f^{-1})(\epsilon) = (f \circ \varphi^{-1})^{-1}(\epsilon)$.

$\Leftarrow$ Sea $z \in (f \circ \varphi^{-1})^{-1}(\epsilon)$, es decir, $(f \circ \varphi^{-1})^{-1}(\epsilon) = \{z \in \varphi(U_0) : (f \circ \varphi^{-1})(z) = \epsilon\}$. Dado que $z \in \varphi(U_0)$ entonces $z = \varphi(x, y)$ para algún $(x, y) \in U_0$. Además $z = \varphi(x, y) = \varphi(f^{-1}(\epsilon))$. Entonces $(x, y) \in f^{-1}(\epsilon)$. Por lo tanto $(x, y) \in (U_0 \cap f^{-1}(\epsilon))$.

■

Lema de isotopía de Morse

El lema de isotopía de Morse nos da un criterio útil para cuando dos conjuntos de nivel de una función suave son difeomorfas.

Definición 1.29. *Sea M una variedad suave y N_1, N_2 subvariedades suaves de M . Decimos que N_1 es isotópica suavemente a N_2 si existe una familia de difeomorfismos suaves de un solo parámetro $\psi : [0, 1] \times M \rightarrow M$ tales que para cada $t \in [0, 1]$ se tiene $\psi_t : N_1 \rightarrow N_2$.*

Proposición 1.30. *(Lema de Isotopía de Morse) Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave y propia. Si $[a, b]$ es un intervalo cerrado no vacío contenido en el conjunto de valores regulares en la imagen de f , entonces $f^{-1}(a)$ es isotópica suavemente*

a $f^{-1}(b)$, esto es, hay una familia de difeomorfismos suaves de un solo parámetro $\psi : [0, 1] \times M \rightarrow M$ tales que para cada $t \in [0, 1]$,

$$\psi_t : f^{-1}(a) \rightarrow f^{-1}(a + t(b - a)), \quad (1.5)$$

donde $\psi_t(x) := \psi(t, x)$.

Prueba. Ver Cushman y Bates [6, Apéndice E.3]. ■

La prueba de la proposición anterior consiste en empujar el conjunto de nivel $f^{-1}(a)$ hacia el conjunto de nivel $f^{-1}(b)$ a lo largo de las curvas integrales del campo vectorial gradiente asociado a f .

Proposición 1.31. Sea 0 un valor regular de la función suave $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ y supongase que $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función suave. Si $x \in f^{-1}(0)$ es un punto crítico de

$$g|_{f^{-1}(0)} : f^{-1}(0) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

con **multiplicador de Lagrange** λ , esto es

$$Dg(x) + \lambda_1 Df_1(x) + \dots + \lambda_k Df_k(x) = 0 \quad (1.6)$$

entonces el Hessiano de $g|_{f^{-1}(0)}$ en x es

$$(D^2g(x) + \lambda_1 D^2f_1(x) + \dots + \lambda_k D^2f_k(x))|_{T_x f^{-1}(0)} \quad (1.7)$$

donde $T_x(f^{-1}(0)) = \ker Df(x)$

Prueba. Ver Cushman y Bates [6, apéndice E.2]. ■

La teoría de Morse es solamente una parte de la teoría llamada **Teoría de**

singularidades, existen diversos libros respecto a esta teoría, pero como una introducción se puede ver el libro de aportaciones matemáticas de Bulajich y Lopez de Medrano [4].

1.3. Álgebra y geometría simpléctica

En esta sección hacemos una extensión de conceptos de álgebra lineal y de una variedad diferenciable para definir un álgebra lineal simpléctico y una variedad simpléctica respectivamente. La referencia principal de esta sección viene dada por Cushman y Bates [6, apéndice A].

Si $B : E \times F \rightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal, esto es, es lineal en cada una de sus entradas, su matriz B_{ij} se define por $B_{ij} = B(e_i, f_j)$, es decir, $B(v, w) = v^i B_{ij} w^j$ siendo las e_i una base para E y las f_j una base para F . Definimos la transformación lineal **asociado** $B^\flat : E \rightarrow F^*$ por $B^\flat(v)(w) = B(v, w)$.

Definición 1.32. Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita y sea $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal continua sobre V . La forma ω se dice **no degenerada** si $\omega(v, w) = 0$ para toda $w \in V$ implica que $v = 0$.

La transformación lineal continua inducida $\omega^\flat : V \rightarrow V^*$ se define por

$$\omega^\flat(v)(w) = \omega(v, w) \quad (1.8)$$

La no degeneración de ω es equivalente a la inyectividad de $\omega^\flat$.

Si $\{e^j\}$ denota la base para V^* , entonces $\{e^j\}$ es la base dual a la base $\{e_i\}$, esto es, $\langle e^j, e_i \rangle = \delta_i^j$, y si escribimos $v = v^i e_i$ y $w = w^i e_i$, entonces $\omega(v, w) = v^i \omega_{ij} w^j$.

Definición 1.33. La **forma simpléctica** ω sobre un espacio vectorial V es una forma bilineal antisimétrica no degenerada sobre V . El par (V, ω) es llamado un

espacio vectorial simpléctico.

En literatura mas avanzada como puede verse en [5], se tiene que las formas diferenciables de orden k o simplemente una k -forma es justamente un tensor antisimétrico del tipo $(0, k)$. Estos son una clase importante de campos tensoriales sobre una variedad diferenciable las cuales juegan un rol importante en las aplicaciones físicas.

Complementos ortogonales simplécticos.

Definición 1.34. Sea (V, ω) un espacio vectorial simpléctico y sean W un subespacio de V .

$$W^\omega = \{v \in V \mid \omega(v, w) = 0, \forall w \in W\} \quad (1.9)$$

es llamado el **complemento ortogonal simpléctico** de W .

A continuación mostramos algunas propiedades.

Proposición 1.35. Sean U, W subespacios vectoriales de (V, ω) .

1. W^ω es cerrado
2. $U \subset W$ implica que $W^\omega \subset U^\omega$
3. $U^\omega \cap W^\omega = (U + W)^\omega$
4. Si V es de dimensión finita, entonces $\dim W + \dim W^\omega = \dim V$
5. Si V es de dimensión finita, $W^{\omega\omega} = W$
6. Si U y W son cerrados, entonces $(U \cap W)^\omega = U^\omega \cap W^\omega$

Definición 1.36. Un subespacio W de un espacio vectorial simpléctico (V, ω) es simpléctico si y solo si $\omega|_{W \times W}$ es no degenerada

Proposición 1.37. *Sea W un subespacio del espacio vectorial simpléctico (V, ω) .*

Entonces

1. *W es simpléctico si y solo si $W \cap W^\omega = \{0\}$*
2. *Si W es un subespacio simpléctico, entonces W^ω también lo es.*

Prueba. 1. $\Rightarrow$ Supongamos que $w_1 \in W \cap W^\omega$. Entonces $\omega(w_1, w) = 0$ para toda $w \in W$. Como $\omega|_{W \times W}$ es no degenerada, entonces $w_1 = 0$. Por lo tanto $W \cap W^\omega = \{0\}$.

$\Leftarrow$ Supongamos que para algún $w_1 \in W$ se tiene $\omega(w_1, w) = 0 = \omega^\flat(w_1)(w)$. Entonces para toda $w \in W$ se tiene $0 = \omega(w_1, w)$, esto es, $w_1 \in W^\omega$. Por lo tanto $w_1 \in W \cap W^\omega = \{0\}$. Puesto que la dimensión $W = \text{dimensión } W^*$ entonces la función $\omega^\flat : W \rightarrow W^*$ es biyectiva. Entonces $\omega|_{W \times W}$ es no degenerada.

2. Puesto que W es simpléctico, $\{0\} = W \cap W^\omega = (W^\omega)^\omega \cap W^\omega$. Luego por el inciso anterior W^ω es simpléctico. ■

La **geometría simpléctica** es una globalización del álgebra simpléctica. Ésta estudia las variedades simplécticas y los difeomorfismos. La relación con la mecánica se debe, en primera instancia, a que el **espacio fase** de un sistema mecánico es una **variedad simpléctica**, y el tiempo de evolución de un sistema dinámico conservativo es una familia de un solo parámetro de difeomorfismos simplécticos.

Definición 1.38. *Una forma simpléctica o una estructura simpléctica sobre una variedad suave M es una 2-forma ω no degenerada y cerrada sobre M , es decir, para cada $x \in M$, $\omega(x)$ es no degenerada y $d\omega = 0$.*

Definición 1.39. *Una **variedad simpléctica** (M, ω) es un par consistiendo de una variedad suave M junto con una 2-forma ω no degenerada y cerrada, en otras palabras, $(T_p M, \omega(p))$ es un espacio vectorial simpléctico.*

Si (M_1, ω_1) y (M_2, ω_2) son variedades simplécticas, entonces la transformación suave $f : M_1 \rightarrow M_2$ es una transformación simpléctica o canónica si $f^*\omega_2 = \omega_1$.

Observacion. En [2] se puede mostrar que no toda variedad de dimensión par permite una estructura simpléctica. Por ejemplo la esfera S^{2n} no puede admitir una estructura simpléctica si $n \geq 2$.

En muchos problemas físicos, el espacio fase es el haz cotangente T^*Q del espacio de configuración Q . Sobre T^*Q hay una estructura simpléctica natural dada Q como una variedad suave de dimensión n y coordenadas locales $\{dq^1, \dots, dq^n\}$. Entonces $\{dq^1, \dots, dq^n\}$ es una base de T_q^*Q (el haz cotangente anclado o teniendo base en q) y escribiendo $\alpha \in T_q^*Q$ como $\alpha = p_i dq^i$ se tienen coordenadas locales $\{q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n\}$ sobre T^*Q .

Definimos la **forma simpléctica canónica** ω sobre T^*Q por $\omega = dq^j \wedge dp_j$. Esta 2-forma ω es localmente constante, esto es, ω es independiente del punto base y por lo tanto $d\omega = 0$.

1.4. Grupos y álgebras de Lie

En esta sección definimos lo que es un grupo de Lie, el álgebra de Lie asociado al grupo de Lie, acciones sobre un grupo y propiedades de estas acciones. Las acciones de un grupo de Lie son importantes pues nos permiten identificar simetrías dentro de un sistema mecánico. Las principales referencias para esta sección vienen dadas por Marsden [13] y Mircea [15].

Definición 1.40. *Un grupo de Lie es una variedad G que tiene una estructura de grupo consistente con su estructura de variedad en el sentido de que la multiplicación de grupo $\mu : G \times G \rightarrow G : (g, h) \mapsto gh$ es una transformación C^∞ .*

Observación. En el caso de un grupo matricial de Lie, este es un conjunto no vacío de matrices invertibles con entradas en los reales o complejos, junto con la operación de multiplicación matricial. Tal conjunto G debe ser cerrado bajo dicha operación, inversión de matriz y la toma de límites dentro del conjunto de todas las matrices invertibles.

Las transformaciones $L_g : G \rightarrow G, h \mapsto gh$ y $R_h : G \rightarrow G, g \mapsto gh$, son llamadas las transformaciones de **traslación izquierda y derecha** respectivamente del grupo. Por lo tanto tenemos $L_{g_1} \circ L_{g_2} = L_{g_1 g_2}$ y $R_{h_1} \circ R_{h_2} = R_{h_2 h_1}$. Si e denota el elemento identidad, entonces $L_e = Id = R_e$, y por lo tanto $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$ y $(R_h)^{-1} = R_{h^{-1}}$.

Ejemplo 1.4.1. El grupo de isomorfismos lineales de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$ es un grupo de Lie de dimensión n^2 , llamado **el grupo lineal general** y denotado por $GL(n, \mathbb{R})$. Este es una variedad suave, puesto que este es un subconjunto abierto del espacio vectorial de todas las transformaciones lineales $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$. El grupo $GL(n, \mathbb{R})$ es la imagen inversa de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ bajo la función continua $A \rightarrow \det A$ de $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ a $\mathbb{R}$.

Sea e el elemento identidad de G . Cualquier vecindad de e puede ser mapeado por una traslación L_g sobre una vecindad de $ge = g$. Nosotros podemos introducir un mapeo diferencial dado por $dL_g : T_e G \rightarrow T_g G$ y por lo tanto a cada elemento de $T_e G$ le podemos asociar un campo vectorial invariante sobre G .

Definición 1.41. Un campo vectorial X sobre G se dice *izquierdo invariante*, si $\forall g \in G$ se tiene $dL_g X(e) = X(g)$, esto es equivalente a decir que $\forall h \in G$ se tiene $dL_g X(h) = X(gh)$.

Se puede demostrar como en [13] que el paréntesis de cualesquiera dos cam-

pos vectoriales invariantes izquierdos es también un campo vectorial invariante izquierdo. Esto permite darle a $T_e G$ la estructura de un álgebra de Lie.

Sea e el elemento identidad de G . Entonces para cada $\xi \in T_e G$ definimos un campo vectorial X_ξ sobre G por $X_\xi(g) = T_e L_g(\xi)$. Entonces $X_\xi(gh) = T_e L_{gh}(\xi) = T_e(L_g \circ L_h)(\xi) = T_h L_g(T_e L_h(\xi)) = T_h L_g(X_\xi(h))$ y por lo tanto X_ξ es un campo vectorial izquierdo invariante.

Definición 1.42. Definimos el **paréntesis de Lie** en $T_e G$ por

$$[\xi, \eta] = [X_\xi, X_\eta](e) = X_{[\xi, \eta]} \quad (1.10)$$

para cada $\xi, \eta \in T_e G$ y donde $[X_\xi, X_\eta]$ es el paréntesis de Jacobi-Lie de campos vectoriales.

Definición 1.43. El espacio vectorial $T_e G$ con esta estructura de álgebra de Lie es llamado el **álgebra de Lie** de G y se denota por $\mathfrak{g}$.

Observación. Dado un grupo matricial de Lie G , el álgebra matricial de Lie $\mathfrak{g}$ de G es el conjunto de matrices $\{g'(0) : g \in C^\infty(M, \mathbb{R}), g(0) = I\}$, donde la derivada de una función de valor matricial es dada por la matriz de las derivadas de cada entrada. Dicho en palabras, el álgebra de Lie de un grupo matricial de Lie como conjunto se define simplemente como el espacio tangente a la identidad en G .

Ejemplo 1.4.2. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Entonces $T_e V \simeq V$ (isomorfo) y el campo vectorial izquierdo invariante definido por $\xi \in T_e V$, es el campo vectorial constante $X_\xi(\eta) = \xi$ para toda $\eta \in V$. Por lo tanto, el álgebra de Lie de V es V misma.

Ejemplo 1.4.3. El álgebra de Lie de $GL(n, \mathbb{R})$ es $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, denotado por $\mathfrak{gl}(n)$,

el espacio vectorial de todas las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$, con el conmutador de paréntesis $[A, B] = AB - BA$.

Ejemplo 1.4.4. Sea $G = SO(3) = \{A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}) : A^t A = I, \det A = 1\}$ el grupo de rotaciones en $\mathbb{R}^3$. Entonces el álgebra de Lie de $SO(3)$, denotado por $\mathfrak{so}(3)$, está dado por el siguiente conjunto

$$\mathfrak{so}(3) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -a & b \\ a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

El álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ lo identificamos con $\mathbb{R}^3$ por asociando a cada $v = (v^1, v^2, v^3) \in \mathbb{R}^3$ la matriz $\hat{v} \in \mathfrak{so}(3)$ dada por

$$\hat{v} = \begin{bmatrix} 0 & -v^3 & v^2 \\ v^3 & 0 & -v^1 \\ -v^2 & v^1 & 0 \end{bmatrix}$$

es decir, $v \mapsto \hat{v}$ tal que $\hat{v}w = v \times w$, que es justamente el producto vectorial usual de $\mathbb{R}^3$. Entonces se tienen las siguientes identidades

$$\begin{aligned} u \hat{\times} v &= [\hat{u}, \hat{v}] \\ u \cdot v &= -\frac{1}{2} \text{Tr}(\hat{u} \cdot \hat{v}) \end{aligned}$$

Entonces, si ponemos el producto cruz sobre $\mathbb{R}$, el operador $\hat{\cdot}$ es un isomorfismo de álgebras de Lie y por lo tanto podemos identificar $\mathfrak{so}(3)$ con $\mathbb{R}^3$ mediante el producto cruz como el paréntesis de Lie.

Sea X_ξ un campo vectorial izquierdo invariante sobre G correspondiente a $\xi \in$

G . Entonces hay una curva integral única $c_\xi : \mathbb{R} \rightarrow G$ de X_ξ comenzando en e , es decir, $\dot{c}_\xi(t) = X_\xi(c_\xi(t))$, $c_\xi(0) = e$. Afirmamos que $c_\xi(t+s) = c_\xi(t)c_\xi(s)$, lo cual significa que $c_\xi(t)$ es un subgrupo de un solo parámetro de G .

Definición 1.44. La función exponencial $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ se define por $\exp(\xi) = c_\xi(1)$.

Definición 1.45. Sea G un grupo de Lie y sea M una variedad. Una **acción** (izquierda) de un grupo de Lie G sobre M es una transformación suave $\Phi : G \times M \rightarrow M$ tal que:

1. $\Phi(e, x) = x \quad \forall x \in M$
2. $\Phi(g, \Phi(h, x)) = \Phi(gh, x), \quad \forall g, h \in G, x \in M$

Una **acción derecha** es una transformación $\Psi : M \times G \rightarrow M$ que satisface $\Psi(x, e) = x$ y $\Psi(\Psi(x, g), h) = \Psi(x, gh)$. Para toda $g \in G$, sea $\Phi_g : M \rightarrow M$ dada por $x \mapsto \Phi(g, x)$, entonces $\Phi_e = id_M$ y $\Phi_{gh} = \Phi_g \circ \Phi_h$.

Definición 1.46. Si Φ es una acción de G sobre M y $x \in M$, la **órbita** de x se define como

$$\text{Orb}(x) = \{\Phi_g(x) : g \in G\} \subset M \quad (1.11)$$

En dimensiones finitas uno puede demostrar tal como en el libro de Marsden [13], que la órbita de x , $\text{Orb}(x)$, es una variedad inmersa de M .

Definición 1.47. Para $x \in M$, el grupo de **isotropía** (estabilizador o simetría) de Φ en x esta dada por

$$G_x := \{g \in G : \Phi_g(x) = x\} \subset G \quad (1.12)$$

Una acción se dice

1. **Transitiva** si para toda $x, y \in M$ hay una $g \in G$ tal que $gx = y$;
2. **Efectiva** si $\Phi_g = id_M$ implica que $g = e$; esto es, $g \rightarrow \Phi_g$ es uno a uno;
3. **Libre** si esta no tiene puntos fijos, esto es, $\Phi_g(x) = x$ implica que $g = e$;
4. **Propia** si $\tilde{\Phi} : G \times M \rightarrow M \times M : (g, x) \mapsto (x, \Phi(g, x))$ es una función propia, es decir si $K \subset M \times M$ es compacto, entonces $\tilde{\Phi}^{-1}(K)$ es compacto.

Una acción Φ de G sobre una variedad M define una **relación de equivalencia** sobre M por la relación de pertenecer a la misma órbita; explícitamente, para $x, y \in M$, decimos que x es equivalente a y y que lo denotamos por $x \sim y$, si existe una $g \in G$, tal que $gx = y$, esto es, si $y \in Orb(x)$. Ahora tomamos el cociente M/G como el conjunto de estas clases de equivalencia, esto es, el conjunto de órbitas, algunas veces llamado el **espacio orbital**. Entonces la función orbital

$$\pi : M \rightarrow M/G : x \mapsto Orb(x) \quad (1.13)$$

es suprayectivo. De acuerdo a Abraham [12] el espacio orbital M/G es un espacio topológico si $U \subseteq M/G$ es abierto si y solo si $\pi^{-1}(U)$ es un conjunto abierto de M .

Proposición 1.48. *Si $\Phi : G \times M \rightarrow M$ es una acción propia y libre, entonces M/G es una variedad suave y $\pi : M \rightarrow M/G$ es una submersión suave.*

Prueba. Ver Abraham [12, secc. 4.4] ■

Ejemplo 1.4.5. Sea $M = \mathbb{R}$, $G = \mathbb{R}$ y la acción de G sobre M dada por

$$\Phi : G \times M \rightarrow M : (s, x) \mapsto x + s$$

Entonces para $x \in \mathbb{R}$, la órbita $Orb(x) = \mathbb{R}$. Por lo tanto, M/G es un simple punto, y la acción es transitiva, propia y libre.

Definición 1.49. *Supongase $\Phi : G \times M \rightarrow M$ una acción. Para cada $\xi \in \mathfrak{g}$, la transformación $\Phi^\xi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$, definido por $\Phi^\xi(t, x) = \Phi(\exp(t\xi), x)$, es una acción sobre M . En otras palabras, $\Phi_{\exp(t\xi)} : M \rightarrow M$ es un flujo sobre M . El correspondiente campo vectorial sobre M , dado por*

$$\xi_M(x) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_{\exp(t\xi)}(x) = T_e \Phi_x \xi \quad (1.14)$$

*es llamado el **generador infinitesimal** de la acción correspondiente a ξ .*

Definición 1.50. *Sea M una variedad suave, G un grupo de Lie y $\Phi : G \times M \rightarrow M$ una acción de G sobre M . Decimos que una función suave $f : M \rightarrow M$ es **equivariante** con respecto para esta acción si para toda $g \in G$ se tiene*

$$f \circ \Phi_g = \Phi_g \circ f.$$

Proposición 1.51. *Sea $f : M \rightarrow M$ una función suave equivariante. Entonces para cualquier $\xi \in \mathfrak{g}$ tenemos*

$$Tf \circ \xi_M = \xi_M \circ f$$

Prueba. Por equivarianza se tiene $f \circ \Phi_{\exp(t\xi)} = \Phi_{\exp(t\xi)} \circ f$. Diferenciando con respecto a t en $t = 0$ y usando la regla de la cadena se tiene:

$$Tf \circ \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_{\exp(t\xi)} \right) = \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_{\exp(t\xi)} \right) \circ f$$

esto es, $Tf \circ \xi_M = \xi_M \circ f$. ■

Definición 1.52. Si $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ es una curva sobre la variedad M , definimos el levantamiento de γ a TM la cual es una curva sobre TM dada por

$$\bar{\gamma} : [a, b] \rightarrow TM : t \mapsto \left(\gamma(t), \frac{d\gamma(t)}{dt} \right).$$

Definición 1.53. Sea $\Phi : G \times M \rightarrow M$ una acción. Definimos el levantamiento izquierdo tangente de la acción del grupo G sobre TM por

$$\bar{\Phi} : G \times TM \rightarrow TM : (g, \dot{\gamma}(0)) \mapsto \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi(g, \gamma(t)). \quad (1.15)$$

1.5. Mapeos de momento

Para obtener **cantidades conservadas** en sistemas Lagrangianos y Hamiltonianos con simetrías se utiliza el concepto de mapeo de momento. Una formulación muy general de la relación entre simetrías y cantidades conservadas fue dada por Emmy Noether, quien mostró que asociado a cualquier grupo de simetrías de un sistema mecánico hay (posiblemente definido localmente) una cantidad conservada. Este resultado es conocido como **Teorema de Noether**.

Las cantidades conservadas son llamadas **mapeos de momento** y resultan ser mapeos de Poisson desde el espacio fase del sistema mecánico al dual del álgebra de Lie del grupo de simetría. Los momentos lineal y angular asociados con invarianza traslacional y rotacional son los ejemplos más comunes. Para esta sección la referencia principal viene dada por Mircea [15].

Definición 1.54. Sea (M, ω) una variedad simpléctica conexa y $\Phi : G \times M \rightarrow M$ una acción simpléctica del grupo de Lie G sobre M . Si para cada $\xi \in \mathfrak{g}$ existe una función definida globalmente $\hat{J}(\xi) : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\xi_M = X_{\hat{J}(\xi)}$$

entonces la transformación $J : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$, dada por

$$J : x \in M \mapsto J(x) \in \mathfrak{g}^*$$

$$J(x)(\xi) = \hat{J}(\xi)(x)$$

es llamado el mapeo de momento para la acción simpléctica Φ .

La definición anterior define una transformación que manda vectores en $\mathfrak{g}$ a funciones suaves sobre M . En otras palabras, dado un mapeo de momento J es equivalente a dar una transformación lineal $\hat{J} : \mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$ tal que $X_{\hat{J}(\xi)} = \xi_M$.

Proposición 1.55. Sean (M, ω, G) como en la definición 1.54. Sea $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función que es invariante bajo la acción del grupo G , esto es, $(H(\Phi_g(x))) = H(x)$ para toda $x \in M$ y $g \in G$. Entonces $\hat{J}(\xi)$ es una constante del movimiento para la dinámica generada por H .

Prueba. Sucesivamente podemos escribir

$$\begin{aligned} \{H, \hat{J}(\xi)\}_\omega(x) &= (X_{\hat{J}(\xi)}(H))(x) = (\xi_M(H))(x) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_{\exp(t\xi)}^* H(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} H(\Phi_{\exp(t\xi)}(x)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} H(x) = 0. \end{aligned}$$

■

Proposición 1.56. (Noether) Sea Φ una acción simpléctica de G sobre (M, ω) con el mapeo de momento J . Supongase que $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ es G invariante bajo esta acción. Entonces J es una constante del movimiento para H , es decir, $J \circ \phi_t = J$, donde ϕ_t es el flujo de X_H .

Prueba. (Siguiendo a Mircea [15, secc. 3.3]) Para cada $\xi \in \mathfrak{g}$ se tiene $\{H, \hat{J}(\xi)\}_\omega = 0$ o equivalentemente $\hat{J}(\xi)(\phi_t(x)) = \text{constante}$. Puesto que $\phi_0(x) = x$, se sigue que $\hat{J}(\xi)(\phi_t(x)) = \hat{J}(\xi)(x)$ y por lo tanto $J \circ \phi_t = J$. ■

Definición 1.57. Sea G un grupo de Lie conmutativo y M una variedad suave. Una acción simpléctica con mapeo de momento J invariante bajo la acción del grupo para toda $x \in M$ y $g \in G$ se dice una **acción hamiltoniana**.

En el caso de que G no sea un grupo de Lie conmutativo, la definición de ser una acción hamiltoniana requiere de más condiciones como puede ver por ejemplo en libro de Mircea [15].

1.6. Dinámica Hamiltoniana

La **energía** es usualmente usada como una cantidad conservada en física. En un sistema cerrado la energía es constante conforme el sistema físico evoluciona en el tiempo. Para cualquier sistema físico, cada cantidad conservada conocida proporciona una ecuación que puede ser muy útil en el análisis del sistema. Pero la energía es más que una cantidad conservada: ésta, como función diferenciable con valores reales, determina un campo vectorial que define la dinámica del sistema.

Esta función de energía la llamamos la **función Hamiltoniana** H y el correspondiente campo vectorial sobre el espacio fase lo llamamos un **campo vectorial Hamiltoniano** y lo denotamos como X_H . El campo vectorial corresponde a un sis-

tema de ecuaciones diferenciales de primer orden sobre el espacio fase. La solución de estas ecuaciones diferenciales es el **flujo Hamiltoniano**. Físicamente el flujo Hamiltoniano representa los posibles movimientos físicos. La referencia principal viene dada por Mircea [15].

Definición 1.58. Sea (M, ω) una variedad simpléctica y $H \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ una función de valor real suave definida sobre M . El campo vectorial X_H determinado por la condición

$$i_{X_H}\omega = dH$$

es llamado un campo vectorial Hamiltoniano con función de energía H .

La expresión $i_{X_H}\omega$ denota la 1-forma diferencial obtenida al insertar el campo vectorial X_H dentro de la primera entrada de la 2-forma ω . Este es algunas veces llamado el producto interior de X_H y ω . La terna (M, ω, H) se denomina un sistema mecánico Hamiltoniano.

Proposición 1.59. Sea $\{q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n\}$ coordenadas canónicas sobre M , entonces en estas coordenadas

$$X_H = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right) \quad (1.16)$$

Prueba. Sea X_H definido por la formula anterior. Por demostrar que $i_{X_H}\omega + dH = 0$. Por construcción tenemos

$$\begin{aligned} i_{X_H}dq^i &= \omega(X_H, dq^i) = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ i_{X_H}dp_i &= \omega(X_H, dp_i) = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} i_{X_H}\omega &= \sum_{i=1}^n i_{X_H}(dp_i \wedge dq^i) = \sum_{i=1}^n (i_{X_H} dp_i) dq^i - \sum_{i=1}^n (i_{X_H} dq^i) dp_i \\ &= -\sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i = -dH \end{aligned}$$

■

Proposición 1.60. (*Ecuaciones de Hamilton*) La curva $(q(t), p(t))$ es una curva integral de X_H si y solo si las ecuaciones de Hamilton se siguen, es decir

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \quad (1.17)$$

con $i = 1, \dots, n$.

Proposición 1.61. (*Conservación de la energía*) Sea (M, ω, H) un sistema mecánico Hamiltoniano y sea $c(t)$ una curva integral para X_H . Entonces $H(c(t))$ es constante en t . Más aún, si ϕ_t es el flujo de X_H , entonces $H \circ \phi_t = H$ para toda t .

Prueba.

$$\begin{aligned} \frac{d(H(c(t)))}{dt} &= dH(c(t)) \dot{c}(t) = dH(c(t)) X_H(c(t)) \\ &= -\omega(X_H(c(t)), X_H(c(t))) = 0 \end{aligned}$$

Sea $c(t)$ una curva integral de X_H con condición inicial x , es decir,

$$\frac{d(c(t))}{dt} = X_H(c(t)), \quad c(0) = x$$

Entonces tenemos $H \circ \phi_t(x) = H(c(t)) = H(c(0)) = H(x)$.

■

Paréntesis de Poisson

El paréntesis de Poisson nos dá la posibilidad de escribir las ecuaciones de Hamilton en una forma equivalente y nos lleva a sistemas mecánicos mas generales.

Definición 1.62. Sea (M, ω) una variedad simpléctica y $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. El paréntesis de Poisson de f y g es la función $\{f, g\}_\omega$ dada por

$$\{f, g\}_\omega = \omega(X_f, X_g) \quad (1.18)$$

Donde X_f, X_g son los campos vectoriales hamiltonianos correspondientemente a los hamiltonianos f, g .

Proposición 1.63. Sea (M, ω) una variedad simpléctica. En coordenadas canónicas $\{q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n\}$ se tiene

$$\{f, g\}_\omega = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} \right)$$

Prueba. Ver Mircea [15, secc. 2.2]. ■

Definición 1.64. Sea (M, ω, H) un sistema mecánico hamiltoniano. Una función suave $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ se dice una constante del movimiento o una **primera integral** si esta satisface la siguiente condición $\{f, H\}_\omega = 0$.

Definición 1.65. Un sistema hamiltoniano (M, ω, H) es completamente integrable si este posee $n = (\dim M)/2$ integrales de movimiento independientes, $f_1 = H, f_2, \dots, f_n$ las cuales a pares están en involución con respecto al paréntesis de Poisson, i.e., $\{f_i, f_j\} = 0$ para toda $i, j = 1, \dots, n$.

Definición 1.66. Sea $(P, \{, \})$ una variedad de Poisson y $C \in C^\infty(P, \mathbb{R})$ una función suave no constante tal que $\{C, f\} = 0$ para cada $f \in C^\infty(P, \mathbb{R})$. Entonces C es llamada una función **Casimir**.

Si una variedad P tiene una estructura del álgebra de Lie $\{, \}$ sobre $C^\infty(P, \mathbb{R})$ la cual satisface la identidad de Leibniz entonces decimos que la variedad P junto con esta operación de paréntesis es una **variedad de Poisson**.

1.7. Estructura de la tesis

En el capítulo de introducción damos todas aquellas definiciones y proposiciones que nos serán de utilidad para los siguientes capítulos, algunas de estas proposiciones se demostrarán y en otras solamente daremos la referencia.

Los siguientes tres capítulos restantes son totalmente dedicados al **péndulo esférico** y, la parte más importante de la tesis se encuentra en el capítulo 4 donde se describen las diferentes topologías asociadas a las diferentes funciones.

En el capítulo 2 se muestra la dinámica de dicho sistema, es decir, se muestran explícitamente las ecuaciones de Hamilton y, al final de dicho capítulo se muestra que hay otra cantidad conservada llamada el momento angular J . Dado que $H|_{TS^2}$ y $J|_{TS^2}$ dan cero bajo el paréntesis de Poisson, entonces se dice que el péndulo esférico es un sistema hamiltoniano completamente integrable.

En el capítulo 3 reducimos el espacio fase original a un espacio fase reducido M_j mediante espacios cocientes, estas a su vez las identificamos como variedades semialgebraicas las cuales forman un conjunto de polinomios los cuales se anulan simultáneamente en todo punto de la variedad. Al final se da el hamiltoniano reducido H_j .

En el capítulo 4 se encuentran los puntos críticos de la función de energía-

momento de varias formas todas ellas equivalentes y que nos permitirán identificar las topologías siguientes: a) topología de $H_j^{-1}(h)$, b) topología de $\mathcal{EM}^{-1}(h, j)$ y, c) topología de $(H|TS^2)^{-1}(h)$.

Capítulo 2

Dinámica y simetría del péndulo esférico

En esta sección siguiendo a Cushman y Bates [6] trataremos el péndulo esférico como un sistema hamiltoniano constreñido, se derivarán las ecuaciones de Hamilton y se mostrará que hay un eje de simetría el cual dá lugar a un momento angular conservado.

2.1. Hamiltoniano Constreñido

Sea $\langle, \rangle$ el producto interior Euclidiano y $\times$ el producto vectorial usual sobre $\mathbb{R}^3$. Sea $\xi = (x, y)$ las coordenadas canónicas sobre $T^*\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3 \times (\mathbb{R}^3)^* \simeq \mathbb{R}^6$. La 2-forma simpléctica canónica en viene dada por $w = \Sigma(dx_i \wedge dy_i)$. Dada la variedad simpléctica $(T^*\mathbb{R}^3, \omega)$ y $f, g \in C^\infty(T^*\mathbb{R}^3)$ se tiene por la definición 1.62 que podemos definir un paréntesis de Poisson $\{, \}_{T^*\mathbb{R}^3}$ sobre $C^\infty(T^*\mathbb{R}^3)$ de la siguiente forma:

$$\{f, g\}_{T^*\mathbb{R}^3} = \omega(X_f, X_g) = \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \frac{\partial g}{\partial \xi_j} \{\xi_i, \xi_j\}_{T^*\mathbb{R}^3}, \quad (2.1)$$

donde los siguientes paréntesis de Poisson respecto a las coordenadas canónicas se siguen:

$$\{x^i, x_j\} = 0; \quad \{y^i, y_j\} = 0; \quad \{x^i, y_j\} = \delta_j^i.$$

Por lo tanto, la matriz $(\{\xi_i, \xi_j\}_{T^*\mathbb{R}^3})$ viene dada por:

$$(\{\xi_i, \xi_j\}_{T^*\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

En términos del parentesis de Poisson, las ecuaciones del campo vectorial hamiltoniano X_H se reescriben como:

$$\dot{x} = \{x, H\}_{T\mathbb{R}^3}, \quad \dot{y} = \{y, H\}_{T\mathbb{R}^3}.$$

Antes de considerar el sistema hamiltoniano constreñido corespondiente al péndulo esférico, consideremos el siguiente sistema hamiltoniano $(H, T\mathbb{R}^3, \omega)$ con hamiltoniano H igual a

$$H : T^*\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \frac{m}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + m g x_3 = \frac{m}{2}\langle y, y \rangle + mg\langle x, e_3 \rangle,$$

donde e_i con $i = 1, \dots, 6$ es la base usual de $\mathbb{R}^6 \cong T^*\mathbb{R}^3$. Eligiendo unidades apropiadas de masa y longitud, podemos asumir que el hamiltoniano toma la forma

$$H : T\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \frac{1}{2}\langle y, y \rangle + \langle x, e_3 \rangle, \quad (2.3)$$

donde la transformada de Legendre nos permite identificar $T^*\mathbb{R}^3$ con $T\mathbb{R}^3$.

De nuestro curso de mecánica sabemos que el hamiltoniano es la suma de la energía cinética más la energía potencial, entonces podemos ver que $\frac{1}{2}\langle y, y \rangle$ representa la energía cinética de la partícula y $\langle x, e_3 \rangle$ la energía potencial. Tenemos por lo tanto una partícula con posición (x_1, x_2, x_3) y con vector de velocidad (y_1, y_2, y_3) .

Utilizando el paréntesis de Poisson definido en (2.1) así como la proposición 1.63 se tiene que las ecuaciones de Hamilton para este sistema son:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial y_i} - \frac{\partial x_1}{\partial y_i} \frac{\partial H}{\partial x_i} \right) = y_1 & \dot{y}_1 &= \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial y_i} - \frac{\partial y_1}{\partial y_i} \frac{\partial H}{\partial x_i} \right) = 0 \\ \dot{x}_2 &= y_2 & \dot{y}_2 &= 0 \\ \dot{x}_3 &= y_3 & \dot{y}_3 &= -1. \end{aligned}$$

La solución a las ecuaciones de Hamilton son:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= a_1 t + a_2 & y_1(t) &= a_1 \\ x_2(t) &= b_1 t + b_2 & y_2(t) &= b_1 \\ x_3(t) &= -\frac{t^2}{2} + c_1 & y_3(t) &= -t, \end{aligned}$$

siendo a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 constantes. **Las curvas integrales de X_H dan el movimiento de una partícula en $\mathbb{R}^3$ bajo una fuerza gravitacional vertical constante.**

Ahora constreñimos el movimiento de la partícula a moverse sobre la esfera $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$. Usando la proposición 1.14 y las siguientes definiciones construiremos la variedad simpléctica TS^2 .

Definición 2.1. Sea $\{c_i\}_{i=1}^k$ funciones suaves sobre una variedad simpléctica (M, ω)

y supongase que $a \in \mathbb{R}^k$ es un valor regular de la función:

$$\mathcal{C} : M \rightarrow \mathbb{R}^k : p \mapsto (c_1(p), \dots, c_k(p)), \quad (2.4)$$

entonces por la proposición 1.14 se tiene que $N = \mathcal{C}^{-1}(a)$ es una subvariedad suave de M , llamada la variedad constreñida definida por las funciones constricción $\{c_i\}_{i=1}^k$.

Definición 2.2. Si la matriz formada por los paréntesis de Poisson de las funciones de constricción $(\{c_i, c_j\}(p))$ es invertible para toda $p \in N$, entonces decimos que N es una subvariedad cosimpléctica de M .

Sea $T_0\mathbb{R}^3 = (\mathbb{R}^3 - \{0\}) \times \mathbb{R}^3 = (x, y)$, con $x \neq 0$ y sean las funciones de constricción c_1, c_2 definidas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} c_1 : T_0\mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \langle x, x \rangle - 1 \\ c_2 : T_0\mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Entonces si definimos la siguiente función

$$\mathcal{C} : T_0\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (c_1(x, y), c_2(x, y)), \quad (2.6)$$

por la definición 2.1 tenemos que $TS^2 = \mathcal{C}^{-1}(0)$ es una subvariedad suave de $T_0\mathbb{R}^3$, cuya dimensión es 4 de acuerdo a la proposición 1.14.

Observación. Algunas veces hablaremos de TS^2 como una variedad simpléctica o como una variedad cosimpléctica; como variedad simpléctica TS^2 es de dimensión 4 dado que S^2 es una variedad de dimensión 2 y por la proposición 3, el haz

tangente TS^2 es una variedad de dimensión 4, como variedad cosimpléctica, TS^2 es una variedad de codimensión 2.

Dada las funciones de constricción c_1 y c_2 en (2.5) estas satisfacen los siguientes paréntesis de Poisson:

$$\{c_1, c_1\} = 0 = \{c_2, c_2\}$$

$$\begin{aligned} \{c_1, c_2\} &= \sum_{i,j} \frac{\partial c_1}{\partial \xi_i} \frac{\partial c_2}{\partial \xi_j} \{\xi_i, \xi_j\}_{T\mathbb{R}^3} \\ &= \frac{\partial c_1}{\partial x_1} \frac{\partial c_2}{\partial y_1} - \frac{\partial c_1}{\partial y_1} \frac{\partial c_2}{\partial x_1} \\ &\quad + \frac{\partial c_1}{\partial x_2} \frac{\partial c_2}{\partial y_2} - \frac{\partial c_1}{\partial y_2} \frac{\partial c_2}{\partial x_2} \\ &\quad + \frac{\partial c_1}{\partial x_3} \frac{\partial c_2}{\partial y_3} - \frac{\partial c_1}{\partial y_3} \frac{\partial c_2}{\partial x_3} \\ &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 = 2\langle x, x \rangle = -\{c_2, c_1\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto la matriz formada por los paréntesis de Poisson de las funciones de constricción es:

$$\left(\{c_i, c_j\} \right)_{T_0\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 0 & 2\langle x, x \rangle \\ -2\langle x, x \rangle & 0 \end{pmatrix}$$

Dado que $x \neq 0$, el determinante de $(\{c_i, c_j\})_{T_0\mathbb{R}^3}$ es distinto de cero y por lo tanto invertible para toda $(x, y) \in T_0\mathbb{R}^3$ cuya inversa es:

$$(C)_{T_0\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2\langle x, x \rangle} \\ \frac{1}{2\langle x, x \rangle} & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto de la definición 2.2 se tiene que TS^2 es una variedad cosimpléctica de $T_0\mathbb{R}^3$. Definida nuestra variedad cosimpléctica lo siguiente es determinar una forma simpléctica para ésta y para ello hacemos uso de la siguiente:

Proposición 2.3. *Si N es una subvariedad cosimpléctica de una variedad simpléctica (M, ω) , entonces $\omega|_N$ es una forma simpléctica sobre N .*

Prueba. (Siguiendo a Cushman y Bates [6]) Para toda $p \in N$ sea V_p el espacio generado por los vectores linealmente independientes $\{X_{c_1}(p), \dots, X_{c_k}(p)\}$, donde las $\{c_i\}_{i=1}^k$ son funciones suaves definidas de la variedad simpléctica (M, ω) a $\mathbb{R}$ y a las cuales llamamos funciones de restricción. Además cada $\{X_{c_i}(p)\}$ satisface $\omega(X_{c_i}(p), v) = dc_i(p) \cdot v$ para toda $v \in T_p N$. Sea $\gamma(t)$ una curva regular sobre la variedad simpléctica con $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = v$, entonces para toda $v \in T_p N$ se tiene

$$dc_i(p) \cdot v = \left. \frac{d}{dt}(c_i \circ \gamma(t)) \right|_{t=0} = \frac{d}{dt}(a_i) = 0$$

donde $a_i = c_i \circ \gamma'(0)$ y $1 \leq i \leq k$. Por lo tanto $\omega(p)(X_{c_i}(p), v) = 0$ para toda $v \in T_p N$, y por la definición 1.34 de complemento ortogonal simpléctico tenemos que $X_{c_i}(p) \in (T_p N)^\omega$. Como que X_{c_i} es arbitrario se tiene $V_p \subseteq (T_p N)^\omega$ y por las propiedades de la proposición 1.35 tenemos $((T_p N)^\omega)^\omega = T_p N \subseteq V_p^\omega$. Dado que la matriz $(\{c_i, c_j\}(p)) = \omega(p)(X_{c_i}(p), X_{c_j}(p))$ es invertible, V_p es un subespacio simpléctico de $(T_p M, \omega(p))$ de dimension k , el cual debe ser par. Por la proposición 1.7 sabemos que $T_p M$ es un espacio vectorial de dimensión m y dado que X_{c_i} es un espacio vectorial de dimensión k entonces

$$\begin{aligned} \dim T_p N &= \dim T_p M - \dim \mathcal{L}\{dc_1(p), \dots, dc_k(p)\} \\ &= \dim T_p M - k \\ &= \dim T_p M - \dim V_p \\ &= \dim V_p^\omega \end{aligned}$$

Por lo tanto $T_p N = V_p^\omega$. Luego $T_p N$ es un subespacio simpléctico de $(T_p M, \omega(p))$,

esto es, $\omega|_N$ es no degenerada. Puesto que $d(\omega|_N) = (d\omega)|_N = 0$, entonces $\omega|_N$ es una forma simpléctica sobre N ■

Por la proposición anterior se tiene que $\omega|_{TS^2}$ es una forma simpléctica sobre la variedad TS^2 . Por lo tanto tiene sentido definir:

Definición 2.4. *El péndulo esférico es el sistema constreñido*

$$(TS^2, \omega|_{TS^2}, H|_{TS^2}).$$

Para calcular directamente el campo $X_{H|_{TS^2}}$ necesitamos conocer la forma simpléctica $\omega|_{TS^2}$, lo cual implica pasar, por ejemplo, a coordenadas esféricas. Sin embargo nos podemos ahorrar este trabajo usando el método que se describe a continuación.

Volviendo al caso de un sistema hamiltoniano constreñido general, y usando la notación de la definición 2.1, considere la matriz $\{C^{ij}\}$. Supongamos que las funciones de constricción son tales que la matriz $\{C^{ij}\}$ es invertible en N (y por lo tanto en una vecindad de N). Sea C_{ij} dicha matriz inversa. Sea F una función suave sobre M y $F|_N$ su restricción a N . Se tiene la siguiente:

Proposición 2.5. *Sea $X_{F|_N}$ el campo vectorial hamiltoniano definido por*

$$\omega_N(X_{F|_N}(z), v) = d_z(F|_N) \cdot v$$

para toda $v \in T_z N$ y donde ω_N es ω restringida a vectores tangentes a N . Entonces para toda $z \in N$,

$$X_{F|_N}(z) = X_F(z) - \sum_{i,j=1}^k \{F, c^i\} C_{ij}(z) X_{c^j}(z). \quad (2.7)$$

Prueba. Ver Marsden [13, prop. 8.5.1]. ■

La prueba de esta proposición se basa en darse cuenta que a) el miembro derecho de (2.7) es tangente a N y b) para todo $v \in T_z N$ se tiene que $d_z F \cdot v = d_z F^* \cdot v$, donde $F^* = F - \sum \{F, c^i\} C_{ij} c^j$.

Ahora haciendo uso de la proposición 2.5 calcularemos a continuación el campo vectorial $X_H|_{TS^2}$. Dada la función H como en (2.3) y las funciones de constricción $c_1(x, y)$ y $c_2(x, y)$ como en (2.5) entonces calculando cada uno de los términos de (2.7) se tiene:

$$\begin{aligned}
 X_H(x, y) &= (y_1, y_2, y_3, 0, 0, -1) = (y, -e_3); \\
 \{H, c_1\}(x, y) &= \sum_{i,j} \frac{\partial H}{\partial \xi_i} \frac{\partial c_1}{\partial \xi_j} \{\xi_i, \xi_j\}_{T\mathbb{R}^3} \\
 &= \frac{\partial H}{\partial x_1} \frac{\partial c_1}{\partial y_1} - \frac{\partial H}{\partial y_1} \frac{\partial c_1}{\partial x_1} \\
 &+ \frac{\partial H}{\partial x_2} \frac{\partial c_1}{\partial y_2} - \frac{\partial H}{\partial y_2} \frac{\partial c_1}{\partial x_2} \\
 &+ \frac{\partial H}{\partial x_3} \frac{\partial c_1}{\partial y_3} - \frac{\partial H}{\partial y_3} \frac{\partial c_1}{\partial x_3} \\
 &= -y_1 2x_1 - y_2 2x_2 - y_3 2x_3 = -2\langle x, y \rangle; \\
 \{H, c_2\}(x, y) &= -\langle y, y \rangle + \langle x, e_3 \rangle; \\
 X_{c_1}(x, y) &= (0, 0, 0, -2x_1, -2x_2, -2x_3) = (0, -2x); \\
 X_{c_2}(x, y) &= (x_1, x_2, x_3, -y_1, -y_2, -y_3) = (x, -y).
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Entonces para toda $(x, y) \in TS^2$ se tiene

$$\begin{aligned}
 X_{H|TS^2}(x, y) &= X_H - \left[\{H, c_1\} C_{12} X_{c^2} + \{H, c_2\} C_{21} X_{c^1} \right] \\
 &= (y, -e_3) - \left[-2\langle x, y \rangle \left(-\frac{1}{2\langle x, x \rangle} \right) (x, -y) \right] + \\
 &\quad - \left[(\langle x, e_3 \rangle - \langle y, y \rangle) \left(\frac{1}{2\langle x, x \rangle} \right) (0, -2x) \right] \\
 &= (y, -e_3) + \left[-\frac{x\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle}, \frac{y\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle} \right] + \\
 &\quad - \left[\frac{0}{2\langle x, x \rangle}, \frac{(\langle x, e_3 \rangle - \langle y, y \rangle)(-2x)}{2\langle x, x \rangle} \right] \\
 &= (y, -e_3) + (0, (\langle x, e_3 \rangle - \langle y, y \rangle)x) .
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el **campo vectorial hamiltoniano** $X_{H|TS^2}(x, y)$ para toda $(x, y) \in TS^2$ viene dado por

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= y \\
 \dot{y} &= -e_3 + (\langle x, e_3 \rangle - \langle y, y \rangle)x .
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

2.2. El mapeo de momento J

Sea $G = \text{SO}(2)$ el grupo de rotaciones, donde

$$\text{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos t & -\text{sen } t \\ \text{sen } t & \cos t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\} .$$

Se puede demostrar siguiendo la definición 1.40 que $\text{SO}(2)$ es un grupo matricial de Lie. Es claro que podemos identificar $\text{SO}(2)$ con el círculo unitario en el plano, S^1 .

Para cada $t \in [0, 2\pi]$ sea ϕ la acción izquierda del grupo $\text{SO}(2)$ (ver definición

1.45) sobre $\mathbb{R}^3$ de la siguiente forma

$$\phi(t, x) = (x_1 \cos t - x_2 \sin t, x_1 \sin t + x_2 \cos t, x_3).$$

Utilizando la observación asociada a la definición 1.43 se tiene que el álgebra de Lie $\mathfrak{so}(2)$ del grupo $SO(2)$ viene dada por

$$\mathfrak{so}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{R}.$$

En efecto, sea c_t la curva dada por

$$c_t : \theta \rightarrow c_t(\theta) = \begin{pmatrix} \cos t\theta & -\sin t\theta \\ \sin t\theta & \cos t\theta \end{pmatrix}.$$

Esta curva pasa por el elemento identidad cuando $\theta = 0$ y

$$\left. \frac{d}{d\theta} \right|_{\theta=0} c_t(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix},$$

como esperábamos.

Por la definición 1.44 se tiene que la función exponencial $\exp : \mathfrak{so}(2) \rightarrow SO(2)$ viene dado por

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} = c_t(1) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

La función exponencial será de utilidad cuando calculemos el generador infinitesimal de la acción.

Por la definición 1.53 la acción izquierda ϕ del grupo S^1 induce un levantamiento de esta acción a $T\mathbb{R}^3$ dada por

$$\Phi : S^1 \times T\mathbb{R}^3 \rightarrow T\mathbb{R}^3 : (t, (x, y)) \mapsto (R_t x, R_t y) \quad (2.10)$$

donde

$$R_t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es claro que R_t restringida a $\mathbb{R}^2$ es justamente $\text{SO}(2)$.

Dada la acción (2.10) por la ecuación (1.14) se tiene que el generador infinitesimal de la acción Φ es aquel campo vectorial $\mathbf{Y}$ cuyas curvas integrales satisfacen:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x \times e_3 \\ \frac{dy}{dt} &= -y \times e_3. \end{aligned} \quad (2.11)$$

En efecto, dado un punto en $T\mathbb{R}^3$, la acción del grupo nos lleva a otro punto de $T\mathbb{R}^3$ dada por

$$\begin{aligned} \Phi(t, (x, y)) &= (x_1 \cos t - x_2 \sin t, x_1 \sin t + x_2 \cos t, x_3, \\ &, y_1 \cos t - y_2 \sin t, y_1 \sin t + y_2 \cos t, y_3). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Para toda $\xi \in \mathfrak{so}(2)$ que es isomorfo a $\mathbb{R}$ se tiene

$$\begin{aligned}
 \xi(x, y) &:= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi(t\xi, (x, y)) \\
 &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp \begin{pmatrix} 0 & -t\xi \\ t\xi & 0 \end{pmatrix} (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) \\
 &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \begin{pmatrix} \cos t\xi & -\sin t\xi \\ \sin t\xi & \cos t\xi \end{pmatrix} (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) \\
 &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} [x_1 \cos t\xi - x_2 \sin t\xi, x_1 \sin t\xi + x_2 \cos t\xi, x_3 \\
 &\quad , \quad y_1 \cos t\xi - y_2 \sin t\xi, y_1 \sin t\xi + y_2 \cos t\xi, y_3] \\
 &= [-x_2\xi, x_1\xi, 0, -y_2\xi, y_1\xi, 0].
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Por otro lado, es fácil ver que si desarrollamos las ecuaciones de (2.11) obtenemos el campo vectorial (2.13).

Por la definición 1.54, el mapeo de momento $J : T\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de la acción Φ del grupo S^1 sobre $T\mathbb{R}^3$ viene dado por

$$J : T\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x_1 y_2 - x_2 y_1 = \langle x \times y, e_3 \rangle. \tag{2.14}$$

En efecto, nosotros mostramos que para toda $\xi \in \mathfrak{so}(2)$ se tiene que

$$\xi(x, y) = -\xi x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - \xi y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + \xi y_1 \frac{\partial}{\partial y_2}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
J(x) \cdot \xi &= \left(y_1 dx_1 + y_2 dx_2 + y_3 dx_3 \right) \\
&\cdot \left(-\xi x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - \xi y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + \xi y_1 \frac{\partial}{\partial y_2} \right) \\
&= -\xi x_2 y_1 + \xi x_1 y_2.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Dado que $\xi \in \mathfrak{so}(2)$ es arbitrario se tiene lo deseado.

Lo siguiente que demostraremos es que tanto para H , TS^2 y J definidos anteriormente se tiene que cada uno de ellos es invariante bajo la acción Φ del grupo S^1 . En efecto

$$\begin{aligned}
\Phi^* H(x, y) &:= H \circ \Phi(x, y) = \frac{1}{2} \left[(y_1 \cos t - y_2 \sin t)^2 + (y_1 \sin t + y_2 \cos t)^2 + \right. \\
&\quad \left. + y_3^2 \right] + x_3 \\
&= \frac{1}{2} (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + x_3 = H(x, y) \\
c_1 \circ \Phi(x, y) &= (x_1 \cos t - x_2 \sin t)^2 + (x_1 \sin t + x_2 \cos t)^2 + \\
&\quad + x_3^2 - 1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = c_1(x, y) \\
c_2 \circ \Phi(x, y) &= (x_1 \cos t - x_2 \sin t)(y_1 \cos t - y_2 \sin t) + \\
&\quad + (x_1 \sin t + x_2 \cos t)(y_1 \sin t + y_2 \cos t) + x_3 y_3 \\
&= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = c_2(x, y) \\
J \circ \Phi(x, y) &= (x_1 \cos t - x_2 \sin t)(y_1 \sin t + y_2 \cos t) + \\
&\quad - (x_1 \sin t + x_2 \cos t)(y_1 \cos t - y_2 \sin t) \\
&= x_1 y_2 - x_2 y_1 = J(x, y)
\end{aligned}$$

Dado que H es invariantes bajo la acción Φ se tiene por la proposición 1.55 que J es una constante del movimiento para la dinámica generada por H . De la misma

manera, $J|TS^2$ es una constante de movimiento para la dinámica generada por $H|TS^2$ y dada por el campo vectorial (2.9). Entonces $J|TS^2$ es una primera integral del péndulo esférico. Por lo tanto, por la definición 1.65 se tiene que el sistema hamiltoniano $(TS^2, \omega|TS^2, H|TS^2)$ es un sistema hamiltoniano **completamente integrable**.

Capítulo 3

Reducción de la simetría S^1

En esta sección reduciremos nuestro sistema Hamiltoniano hasta obtener un sistema Hamiltoniano con un grado de libertad sobre un espacio fase reducido el cual es singular.

Sea $\tau_i : T\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ con $i = 1, \dots, 6$ el siguiente cambio de variables

$$\begin{aligned}\tau_1 &= x_3 & \tau_4 &= x_1 y_1 + x_2 y_2 \\ \tau_2 &= y_3 & \tau_5 &= x_1^2 + x_2^2 \\ \tau_3 &= y_1^2 + y_2^2 & \tau_6 &= x_2 y_1 - x_1 y_2.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Es fácil verificar que las τ_i 's satisfacen la siguiente relación polinomial

$$\tau_4^2 + \tau_6^2 = \tau_3 \tau_5 \quad \tau_3 \geq 0, \tau_5 \geq 0.\tag{3.2}$$

Dada la relación polinomial anterior se observa que el cambio de variables (3.1) es

singular. En efecto, el jacobiano de dicha transformación viene dada por

$$\frac{\partial(\tau_1, \dots, \tau_6)}{\partial(x_1, \dots, y_3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2y_1 & 2y_2 & 0 \\ y_1 & y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2x_1 & 2x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & -y_1 & 0 & -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix},$$

cuyo determinante es cero. Esto quiere decir que las variables τ_i 's no nos van a servir para describir todo $T\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^6$. Sin embargo son justo las variables adecuadas para describir $T\mathbb{R}^3/S^1$, como veremos a continuación.

Observación. De acuerdo a Cushman y Bates [6] y por el teorema de Weyl [18] se demuestra que las τ_i 's con $i = 1, \dots, 6$ generan el álgebra de polinomios invariantes bajo la acción Φ del grupo S^1 .

Una variedad algebraica (en inglés algebraic variety) es esencialmente un conjunto de ceros comunes de un conjunto de polinomios. Una variedad algebraica también es una variedad suave de dimensión m (en inglés algebraic manifold), y por lo tanto cada trayectoria local suficientemente pequeña es isomorfa a k^m , donde k es un campo y para nuestro caso es el campo de los números reales. Una variedad semialgebraica W es esencialmente una variedad algebraica en el sentido anterior excepto que a parte del conjunto de ceros comunes de un conjunto de polinomios también permite dentro de este conjunto aquellas soluciones que sean positivas.

Sea W la variedad semialgebraica definida por

$$\begin{aligned} W &= \{(\tau_1(x, y), \dots, \tau_6(x, y)) \in \mathbb{R}^6 : (x, y) \in \mathbb{R}^6\} \\ &= \{(\tau_1, \dots, \tau_6) \in \mathbb{R}^6 : \tau_4^2 + \tau_6^2 = \tau_3\tau_5, \tau_3 \geq 0, \tau_5 \geq 0\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

De acuerdo a Cushman y Bates [6, secc. IV.2] se tiene la siguiente:

Proposición 3.1. *La variedad semialgebraica W es homeomorfo al espacio orbital $T\mathbb{R}^3/S^1$.*

3.1. El espacio reducido M_j

Dado que TS^2 es invariante bajo la acción Φ entonces el espacio orbital TS^2/S^1 es la variedad semialgebraica V definida por

$$\begin{aligned} V &= \{(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \tau_6) \in \mathbb{R}^6 : \\ &\quad \tau_4^2 + \tau_6^2 = \tau_3\tau_5, \tau_1^2 + \tau_5 = 1, \tau_1\tau_2 + \tau_4 = 0, \tau_3 \geq 0, \tau_5 \geq 0\}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde las expresiones $\tau_1^2 + \tau_5 = 1$ y $\tau_1\tau_2 + \tau_4 = 0$ definen elementos del haz tangente de la esfera. Entonces la variedad semialgebraica V está contenida en la variedad semialgebraica W como lo muestra el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} TS^2 & \subseteq T\mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\pi} W \\ \lambda_1 \downarrow & \lambda_0 \downarrow & \nearrow \sigma \\ V = TS^2/S^1 & \subseteq T\mathbb{R}^3/S^1 & \end{array}$$

La π en el diagrama anterior es la función

$$\pi : T\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^6 : (x, y) \mapsto (\tau_1(x, y), \dots, \tau_6(x, y)), \quad (3.5)$$

y la σ en el diagrama anterior es el homeomorfismo de la proposición 3.1.

Dado que $J|TS^2$ es el mapeo de momento de la acción Φ de $S^1 \times TS^2$, el espacio fase reducido

$$V_j = (J|TS^2)^{-1}(j)/S^1 \quad (3.6)$$

es la subvariedad semialgebraica de V definida por $\tau_6 = j$. Esto es así porque sabemos que τ_6 es el momento angular. Eliminando τ_4 y τ_5 de (3.4) se obtiene la variedad semialgebraica M_j dada por

$$M_j = \{(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \in (J|TS^2)^{-1}(j)/S^1 : \tau_3(1 - \tau_1^2) = \tau_1^2\tau_2^2 + j^2, |\tau_1| \leq 1, \tau_3 \geq 0\}. \quad (3.7)$$

Sea μ la proyección dada por

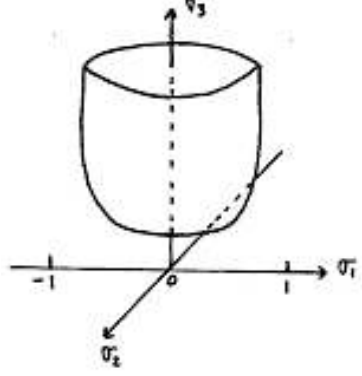
$$\mu = (J|TS^2)^{-1}(j)/S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \tau_6) \mapsto (\tau_1, \tau_2, \tau_3). \quad (3.8)$$

La inversa de la función de proyección $\mu|V_j$ está dado por

$$\nu : M_j \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow (J|TS^2)^{-1}(j)/S^1 : (\tau_1, \tau_2, \tau_3) \mapsto (\tau_1, \tau_2, \tau_3, -\tau_1\tau_2, 1 - \tau_1^2, j^2). \quad (3.9)$$

La función μ es continua con inversa continua y por lo tanto μ es un homeomorfismo, entonces M_j es homeomorfo como variedad semialgebraica a V_j y sirve como un modelo del espacio reducido.

El siguiente diagrama resume las relaciones entre los diferentes objetos introducidos en esta sección. Aquí las λ_i 's son las proyecciones canónicas (funciones

Figura 3.1: Variedad semialgebraica M_j .

orbitales) y H_j es el hamiltoniano reducido que se definirá adelante.

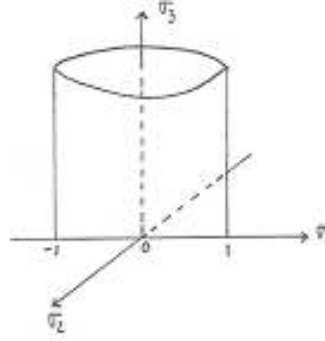
$$\begin{array}{ccc}
 (J|TS^2)^{-1}(j) & \xrightarrow{i} & TS^2 \\
 \lambda_2 \downarrow & & \lambda_1 \downarrow \\
 (J|TS^2)^{-1}(j)/S^1 = V_j^\sharp & \longrightarrow & TS^2/S^1 \\
 \mu \downarrow & & \\
 M_j & \xrightarrow{H_j} & \mathbb{R}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 \subseteq T\mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\pi} & W \\
 \lambda_0 \downarrow & \nearrow \sigma & \\
 \subseteq T\mathbb{R}^3/S^1 & &
 \end{array}
 \quad (3.10)$$

Cuando $j \neq 0$, M_j es difeomorfo a $\mathbb{R}^2$, siendo la gráfica de la función

$$\tau_3 = \frac{\tau_1^2 \tau_2^2 + j^2}{1 - \tau_1^2}, \quad |\tau_1| < 1$$

Cuando $j = 0$, M_0 no es la gráfica de una función, puesto que esta contiene las líneas verticales $\{(\pm 1, 0, \tau_3) \in \mathbb{R}^3 : \tau_3 \geq 0\}$. También M_0 no es suave puesto que los puntos $p_\pm = (\pm 1, 0, 0)$ son puntos singulares. Sin embargo M_0 es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$. Además M_0 se puede obtener como un espacio orbital de la acción del grupo $\mathbb{Z}_2$ sobre la variedad TS^1 definida por

$$\varphi : \mathbb{Z}_2 \times TS^1 \rightarrow TS^1 : (x, y) \mapsto (x, -y)$$

Figura 3.2: Gráfico a M_0 .

Geométricamente este espacio orbital $TS^1/\mathbb{Z}_2$ de la acción φ se obtiene por oprimiendo primero la sección del cilindro TS^1 a un intervalo cerrado, el cual forma un doblez y entonces pegando o identificando este cilindro oprimido a lo largo del doblez hasta que los extremos se junten. Entonces M_0 es el espacio fase TS^1 del péndulo matemático con puntos identificados por la acción $\mathbb{Z}_2$. Esta identificación es necesaria puesto que nosotros no podemos distinguir velocidades positivas y negativas en el péndulo esférico.

Observación. El argumento anterior muestra que la reducción singular del péndulo esférico produce una representación geométrica fiel del límite $j \rightarrow 0$. En [6] se muestra que esta reducción singular también produce un modelo simpléctico exacto.

3.2. El hamiltoniano reducido H_j

Del capítulo anterior se mostro que el Hamiltoniano H definido en (2.3) es invariante bajo la acción Φ , entonces este induce la función

$$H_j : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : (\tau_1, \tau_2, \tau_3) \mapsto \frac{1}{2}(\tau_3 + \tau_2^2) + \tau_1. \quad (3.11)$$

Por Cushman y Bates [6] se tiene que el campo vectorial Hamiltoniano sobre $C^\infty(M_j)$ para el Hamiltoniano reducido $H_j|_{M_j}$ viene dado por

$$X_{H_j|_{M_j}} = \tau_2 \frac{\partial}{\partial \tau_1} + (\tau_1(\tau_1 - \tau_3 - \tau_2^2) - 1) \frac{\partial}{\partial \tau_2} + 2\tau_1\tau_2(-\tau_1 + \tau_3 + \tau_2^2) \frac{\partial}{\partial \tau_3}$$

Siguiendo [6] proponemos el siguiente cambio de variables que será de utilidad en el capítulo siguiente. Sea

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \tau_1 & \sigma_4 &= \tau_4 \\ \sigma_2 &= \tau_2 & \sigma_5 &= \tau_5 \\ \sigma_3 &= \tau_3 + \tau_2^2 & \sigma_6 &= \tau_6. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Dado este nuevo cambio de variables se tiene entonces que la variedad semialgebraica M_j dada en (3.7) se expresa como

$$\begin{aligned} M_j &= \{(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \in \mathbb{R}^3 : \\ &\quad \sigma_3(1 - \sigma_1^2) - \sigma_2^2 - j^2 = 0, |\sigma_1| \leq 1, \sigma_3 - \sigma_2^2 \geq 0\}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Dado que el campo vectorial $X_{H_j|_{M_j}}$ involucra derivadas parciales entonces

recordemos que la transformación para cada una de estas derivadas viene dada por

$$\frac{\partial}{\partial \tau_i} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_j}{\partial \tau_i} \frac{\partial}{\partial \sigma_j},$$

para toda $i = 1, 2, 3$ y $j = 1, 2, 3$. Entonces aplicando esta formula se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau_1} &= \frac{\partial}{\partial \sigma_1} \\ \frac{\partial}{\partial \tau_2} &= \frac{\partial}{\partial \sigma_2} + 2\sigma_2 \frac{\partial}{\partial \sigma_3} \\ \frac{\partial}{\partial \tau_3} &= \frac{\partial}{\partial \sigma_3}. \end{aligned}$$

Entonces sustituyendo tanto las variables τ_i como las parciales de estas en el campo vectorial Hamiltoniano $X_{H_j|M_j}$ se tiene

$$\begin{aligned} X_{H_j|M_j} &= \tau_2 \frac{\partial}{\partial \tau_1} + \left(\tau_1(\tau_1 - \tau_3 - \tau_2^2) - 1 \right) \frac{\partial}{\partial \tau_2} + \\ &+ 2\tau_1\tau_2 \left(-\tau_1 + \tau_3 + \tau_2^2 \right) \frac{\partial}{\partial \tau_3} \\ &= \sigma_2 \frac{\partial}{\partial \sigma_1} + \left(\sigma_1(\sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_2^2 + \sigma_2^2) - 1 \right) \left(\frac{\partial}{\partial \sigma_2} + 2\sigma_2 \frac{\partial}{\partial \sigma_3} \right) + \\ &+ 2\sigma_1\sigma_2 \left(-\sigma_1 + \sigma_3 + \sigma_2^2 - \sigma_2^2 \right) \frac{\partial}{\partial \sigma_3} \\ &= \sigma_2 \frac{\partial}{\partial \sigma_1} + \left((1 - \sigma_1^2) + \sigma_1\sigma_3 \right) \frac{\partial}{\partial \sigma_2} + \\ &+ \left(-2\sigma_2 + 2\sigma_1^2\sigma_2 - 2\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 2\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_1\sigma_2\sigma_3 \right) \frac{\partial}{\partial \sigma_3} \\ &= \sigma_2 \frac{\partial}{\partial \sigma_1} - ((1 - \sigma_1^2) + \sigma_1\sigma_3) \frac{\partial}{\partial \sigma_2} - 2\sigma_2 \frac{\partial}{\partial \sigma_3}. \end{aligned}$$

Así, el campo vectorial hamiltoniano reducido en M_j viene dado por

$$X_{H_j|M_j} = \sigma_2 \frac{\partial}{\partial \sigma_1} - ((1 - \sigma_1^2) + \sigma_1\sigma_3) \frac{\partial}{\partial \sigma_2} - 2\sigma_2 \frac{\partial}{\partial \sigma_3}. \quad (3.14)$$

Observación. Hemos entonces obtenido, como nos habíamos propuesto al inicio de esta sección, la dinámica en M_j , que es un *espacio fase reducido* de dimensión dos y que por lo tanto describe a un sistema físico con un grado de libertad.

Capítulo 4

La función de Energía-Momento

$\mathcal{E}\mathcal{M}$

En esta sección estudiaremos la función de energía-momento

$$\begin{aligned}\mathcal{E}\mathcal{M} : TS^2 \subseteq T\mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (h, j) = \left(\frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + x_3, x_1y_2 - x_2y_1\right)\end{aligned}\tag{4.1}$$

Estudiaremos quienes forman el conjunto de valores críticos, dado que nos permitirá identificar los puntos de equilibrio (pueden ser relativos) del péndulo esférico. A simple vista podemos ver que los puntos $(0, 0, \pm 1, 0, 0, 0) \in T_{(0,0,\pm 1)}S^2$ son puntos de equilibrio, los demás puntos serán puntos de equilibrio relativos. También estudiaremos las fibras de la función $\mathcal{E}\mathcal{M}$, la cual mostrará al conjunto de todas las posiciones y velocidades con energía y momento angular dado.

4.1. Valores críticos

Comenzamos por encontrar al conjunto Σ de valores críticos de la función $\mathcal{E}\mathcal{M}$, es decir, la imagen del conjunto de puntos de $\mathcal{E}\mathcal{M}$ donde su derivada no tenga rango máximo.

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2 : z \rightarrow (f_1(z), f_2(z))$ una función diferenciable. Sea $\Sigma_f := \{ (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 : (x_0, y_0) \text{ son valores críticos de } f \}$. Es decir, para toda $z_0 \in U \subseteq \mathbb{R}^n$, con U un abierto de $\mathbb{R}^n$, tal que

1. $f(z_0) = (f_1(z_0), f_2(z_0)) = (x_0, y_0)$,
2. $Df(z_0)$ no es suprayectiva,

decimos que z_0 es un punto crítico de f y que (x_0, y_0) es un valor crítico de f .

Sea y un valor regular de f_2 . Entonces por la proposición 1.14

$$A_y := f_2^{-1}(y) = \{z \in \mathbb{R}^n : f_2(z) = y\},$$

es una subvariedad de $\mathbb{R}^n$, cuya dimensión es $n-1$. Puesto que y es un valor regular se tiene que $Df_2|_{A_y}(z) \neq 0$.

Proposición 4.1. *Si y_0 es un valor regular de f_2 entonces el punto (x_0, y_0) está en Σ_f si y sólo si x_0 es un valor crítico de $f_1|_{A_{y_0}}$.*

Para la prueba de la proposición 4.1 necesitamos el siguiente:

Lema 4.2. *Sean A, B espacios vectoriales de dimensión finita y sea $T : A \rightarrow B$ una transformación lineal. Entonces*

$$\dim \ker T + \dim \operatorname{im} T = \dim A.$$

Prueba. Éste es un resultado estandar de álgebra lineal; véase e.g. [9]. ■

Prueba de la proposición 4.1. $\Rightarrow$ Haremos la demostración por contrapositiva, es decir, si suponemos que x_0 es un valor regular de $f_1|_{A_{y_0}}$ entonces queremos concluir que $(x_0, y_0) \notin \Sigma_f$. Dado que x_0 es un valor regular de $f_1|_{A_{y_0}}$ para toda $z_0 \in A_{y_0}$ tal que $f_1|_{A_{y_0}}(z_0) = x_0$ tenemos que $D(f_1|_{A_{y_0}})(z_0) \neq 0$. Puesto que $y_0 = f_2(z_0)$ es constante para toda $z_0 \in A_{y_0}$ entonces $D(f_2|_{A_{y_0}})(z_0) = 0$. Dado que $D(f_1|_{A_{y_0}})(z_0) \neq 0$ existe $v_1 \in T_{z_0}A_{y_0}$ tal que $D(f_1|_{A_{y_0}})(z_0) \cdot v_1 \neq 0$. Entonces $Df(z_0) \cdot v_1 = (Df_1(z_0) \cdot v_1, Df_2(z_0) \cdot v_1) = (a, 0)$ para alguna $a \neq 0$. Como y_0 es un valor regular de f_2 , entonces $Df_2(z_0) \neq 0$, por lo que existe $v_2 \in T_{z_0}\mathbb{R}^n$ tal que $Df_2(z_0) \cdot v_2 \neq 0$. Entonces $Df(z_0) \cdot v_2 = (Df_1(z_0) \cdot v_2, Df_2(z_0) \cdot v_2) = (b, c)$, con $c \neq 0$. Por lo tanto $Df_1(z_0) \cdot v_1$ y $Df_2(z_0) \cdot v_2$ son linealmente independientes. Por lo tanto cualquier $z_0 \in f^{-1}(x_0, y_0)$ es un punto regular. Entonces (x_0, y_0) es un valor regular.

$\Leftarrow$ Por demostrar que si $z \in f^{-1}(x_0, y_0)$ entonces $\dim(\text{im } Df(z)) < 2$. Por el lema 4.2 es suficiente demostrar que $\dim(\ker Df(z)) \geq n - 1$. Por hipótesis $Df_1(z) \cdot v = 0$ para todo $v \in T_zA_{y_0}$. Por otro lado, como $f_2|_{A_{y_0}}$ es constante entonces $Df_2(z) \cdot v = 0$ para toda $v \in T_zA_{y_0}$. Entonces $T_zA_{y_0} \subset \ker(Df(z))$. Por la proposición 2 se tiene que $\dim T_zA_{y_0} = n - 1$. Por lo tanto $\dim \ker(Df(z)) \geq n - 1$. ■

Entonces por la proposición anterior, dada j^0 un valor regular, encontrar los valores críticos (h^0, j^0) de $\mathcal{EM}$ equivale a encontrar el valor crítico h^0 de la función $H|_{M_{j^0}}$. En el caso de que j^0 no sea un valor regular, los valores críticos (h^0, j^0) se derivarán directamente de la función $\mathcal{EM}$ de acuerdo a la definición de punto crítico. De la ecuación (3.13) o mas explícitamente de (3.7) sabemos que M_j con $j \neq 0$ representa una variedad que es difeomorfa a $\mathbb{R}^2$. Entonces la función $H|_{M_j}$

se define como

$$H_j := H|M_j : M_j \rightarrow \mathbb{R} : (\sigma_1, \sigma_2) \mapsto \frac{\sigma_2^2 + j^2}{2(1 - \sigma_1^2)} + \sigma_1 \quad (4.2)$$

Por la definición 1.13 se tiene que (σ_1^0, σ_2^0) es un punto crítico de $H|M_j^0$ si

$$(\mathbf{D}(\mathbf{H}|\mathbf{M}_{j^0}))|_{(\sigma_1^0, \sigma_2^0)} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\sigma_1^0((\sigma_2^0)^2 + j^2)}{(1 - (\sigma_1^0)^2)^2} & \frac{\sigma_2^0}{1 - (\sigma_1^0)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces (σ_1^0, σ_2^0) es un punto crítico si $\sigma_2^0 = 0$ y $(1 - (\sigma_1^0)^2)^2 + \sigma_1^0 j^2 = 0$. Despejando a j^2 de la última igualdad se tiene

$$j^2 = \frac{(1 - (\sigma_1^0)^2)^2}{-\sigma_1^0} \quad (4.3)$$

De la ecuación (3.13) sabemos que $\sigma_1 \in (-1, 1)$, entonces para que j^2 este definida se requiere que $\sigma_1^0 \in (-1, 0)$. Sustituyendo $\sigma_2^0 = 0$ y j^2 se tiene que h^0 es un valor crítico de $H|M_j$ si

$$\begin{aligned} h(\sigma_1^0) &= \frac{(\sigma_2^0)^2 + j^2}{2(1 - (\sigma_1^0)^2)} + \sigma_1^0 \\ &= -\frac{(1 - (\sigma_1^0)^2)^2}{2\sigma_1^0(1 - (\sigma_1^0)^2)} + \sigma_1^0 \\ &= -\frac{1}{2\sigma_1^0} + \frac{3\sigma_1^0}{2} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Entonces para $j \neq 0$, h^0 es un valor crítico de $H|M_j$ si tiene la siguiente parametrización

$$h^0(s) = -\frac{1}{2s} + \frac{3}{2}s, \quad s \in (-1, 0).$$

Como se menciona al inicio de esta sección, los puntos $(\pm 1, 0)$ son tambien valores críticos de la función $\mathcal{EM}$ y cuya demostración se hace a continuación.

Definida $\mathcal{E}\mathcal{M}$ como en (4.1) su derivada $D(\mathcal{E}\mathcal{M})$ esta dada por

$$\mathbf{D}(\mathcal{E}\mathcal{M}) = \begin{pmatrix} DH \\ DJ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & y_1 & y_2 & y_3 \\ y_2 & -y_1 & 0 & -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

La derivada $D(\mathcal{E}\mathcal{M})$ no es suprayectiva si esta tiene rango 0 o rango 1. En el caso de que tenga rango cero debe pasar que ambos renglones deben ser nulos, lo cual no ocurre para DH . Por lo tanto $D(\mathcal{E}\mathcal{M})$ tiene rango uno si DH y DJ son linealmente dependientes, entonces los puntos críticos deben satisfacer que $0 = \alpha DH + \beta DJ$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y, α o β distintos de cero. Desarrollando la ecuación anterior e igualando término a término se tienen las siguientes ecuaciones

$$0 = \alpha 0 + \beta y_2 \quad 0 = \alpha y_1 - \beta x_2$$

$$0 = \alpha 0 - \beta y_1 \quad 0 = \alpha y_2 + \beta x_1$$

$$0 = \alpha 1 + \beta 0 \quad 0 = \alpha y_3 + \beta 0$$

De la tercera ecuación del lado izquierdo se obtiene que $\alpha = 0$ y $\beta \neq 0$. Dado que $\beta \neq 0$ entonces se tiene del lado izquierdo que $y_1 = 0 = y_2$ y del lado derecho se tiene $x_1 = 0 = x_2$, pero además como $(x, y) \in TS^2$ y por los resultados anteriores se tiene además que $x_3 = \pm 1$ y $x_3 y_3 = 0$ de donde se tiene que $y_3 = 0$. Por lo tanto $(0, 0, \pm 1, 0, 0, 0) \in TS^2$ son puntos críticos de la función de energía momento $\mathcal{E}\mathcal{M}$ cuyos valores críticos son $(h, j) = (\pm 1, 0)$.

Hemos entonces probado la siguiente:

Proposición 4.3. *El conjunto de valores críticos de la función de energía momento $\mathcal{E}\mathcal{M}$ tiene la siguiente forma*

1. Si $j \neq 0$ (j un valor regular), entonces $(h, j) = \left(-\frac{1}{2\sigma_1} + \frac{3}{2}\sigma_1, \pm\left(\frac{1-\sigma_1^2}{\sqrt{-\sigma_1}}\right)\right)$ con

$$\sigma_1 \in (-1, 0).$$

2. Si $j = 0$ entonces $(h, j) = (\pm 1, 0)$.

A continuación vamos a volver a obtener los valores críticos de la función de energía-momento, esta vez siguiendo el argumento de Cushman y Bates en [6, secc. IV.3]. En comparación con nuestro argumento que nos llevó a la proposición 4.3, el método que se sigue en [6] es más complicado, pero tiene la ventaja de ser más geométrico y será de utilidad para describir la topología de las fibras de las funciones de energía y de energía-momento.

Sea $\Pi_h : \frac{1}{2}\sigma_3 + \sigma_1 = h$ un plano y $M_j : \sigma_2^2 + j^2 = \sigma_3(1 - \sigma_1^2)$ la variedad semialgebraica definida en la sección 3.2.2.

Definición 4.4. Sean A y B subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Sea $p \in A \cap B$ tal que existe $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto con $p \in U$ y $A \cap U, B \cap U$ subvariedades de $\mathbb{R}^n$. Decimos que p es un punto en la intersección de A y B con multiplicidad simple si $\dim(T_p A + T_p B) = \min(n, \dim T_p A + \dim T_p B)$. Decimos que p es un punto de multiplicidad mayor que uno si no es de multiplicidad simple.

Proposición 4.5. Sean $F, G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables y sean $u, v \in \mathbb{R}$ valores regulares de F y G respectivamente. Entonces $p \in F^{-1}(u) \cap G^{-1}(v)$ es de multiplicidad simple si y solo si $(\nabla F, \nabla G)$ son linealmente independientes en p .

Prueba. Haremos la demostración por contrapositiva, es decir, $p \in F^{-1}(u) \cap G^{-1}(v)$ es de multiplicidad mayor que uno si y solo si $(\nabla F, \nabla G)$ son linealmente dependientes en p . Supongamos que $(\nabla F, \nabla G)$ son linealmente dependientes en p . Dado que F y G son funciones diferenciables y u, v valores regulares de F y G respectivamente, entonces ∇F y ∇G son distintos de cero. Sea $A = F^{-1}(u)$ y $B = G^{-1}(v)$ subvariedades de $\mathbb{R}^n$, entonces $p \in A \cap B$ es de multiplicidad mayor

que uno si $\dim(T_p A + T_p B) < \min(n, \dim T_p A + \dim T_p B)$. Esto se satisface si y solo si los planos $T_p A$ y $T_p B$ coinciden y por lo tanto si y solo si los gradientes coinciden y que por hipótesis así ocurre. Por lo tanto $p \in F^{-1}(u) \cap G^{-1}(v)$ es de multiplicidad mayor que uno. ■

Corolario 4.6. *Sea $j \neq 0$. Entonces un punto $p \in \Pi_h \cap M_j$ es de multiplicidad mayor que uno sii p es punto crítico de $\mathcal{EM}$. Esto ocurre sii $h = H(p)$ es un valor crítico de $H|M_j$.*

Prueba. Dado que $j \neq 0$, entonces Π_h y M_j son subvariedades de $\mathbb{R}^3$, parametrizadas por $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ y tanto $\nabla H(p)$ como $\nabla J(p)$ son distintos de cero. Tenemos que $p \in \Pi_h \cap M_j$ es de multiplicidad mayor que uno si $\dim(T_p \Pi_h + T_p M_j) < 3$. Esto es así sii los planos $T_p \Pi_h$ y $T_p M_j$ coinciden, lo cual ocurre sii $\nabla H(p) \parallel \nabla J(p)$, lo cual ocurre sii $D\mathcal{EM}(p)$ tiene rango menor que 2 (pues, de álgebra lineal, sabemos que el número de renglones linealmente independientes es igual al número de columnas linealmente independientes). Esto último equivale a que p sea un punto crítico de $\mathcal{EM}$. Si p es punto crítico de $\mathcal{EM}$, entonces $\mathcal{EM}(p) = (h^0, j^0)$ es un valor crítico de $\mathcal{EM}$. Luego por la proposición 4.1 tenemos que h^0 es un valor crítico de $H|M_{j^0}$. ■

Observación Como conjuntos debemos tener que cualquier elemento de $(H|M_j)^{-1}(h)$ equivale a intersectar el plano Π_h con la variedad semialgebraica M_j en el punto $\sigma^0 = (\sigma_1^0, \sigma_2^0, \sigma_3^0)$. En efecto, de la definición de Π_h podemos despejar a σ_3 y sustituirla en M_j para obtener que

$$M_j : \sigma_2^2 + j^2 = 2(h - \sigma_1)(1 - \sigma_1^2), \quad |\sigma_1| \leq 1$$

Entonces

$$\Pi_h \cap M_j = \{(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \in \mathbb{R}^3 : \sigma_3 = 2(h - \sigma_1), \quad \sigma_2^2 + j^2 - 2(h - \sigma_1)(1 - \sigma_1^2) = 0\}$$

Si definimos

$$Q(\sigma_1, \sigma_2) := \sigma_2^2 + j^2 - 2(h - \sigma_1)(1 - \sigma_1^2) \quad (4.5)$$

entonces

$$\Pi_h \cap M_j = \{(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \in \mathbb{R}^3 : \sigma_3 = 2(h - \sigma_1), \quad Q(\sigma_1, \sigma_2) = 0\}$$

Por otro lado

$$(H|M_j)^{-1}(h) := \{(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \in \mathbb{R}^3 : \frac{\sigma_2^2 + j^2}{2(1 - \sigma_1^2)} + \sigma_1 = h\}$$

Entonces es claro que se dá la igualdad de conjuntos.

Podemos ver de la observación anterior que hemos definido el polinomio Q tal que $Q(\sigma_1, \sigma_2) = 0$ equivale a intersectar Π_h y M_j , de nuestro curso de álgebra elemental, dado un polinomio P de una sola variable nosotros sabemos que significa que dicho polinomio tenga raíces de multiplicidad (ver Uspensky [17]), esta multiplicidad la podemos extender a polinomios de n variables (ver Marsden [11]) y que a continuación se tiene la siguiente:

Definición 4.7. Sea $Q(x_1, \dots, x_n)$ una función suave. Decimos que una raíz $(x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ de Q tiene multiplicidad mayor que uno si el polinomio de Taylor de Q evaluado en $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ no tiene ni término constante ni término lineal.

Proposición 4.8. Sean $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables y

$\frac{\partial F(p)}{\partial x_n} \neq 0$. Sea $Q(x_1, \dots, x_{n-1}) = G(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n(x_1, \dots, x_{n-1}))$ donde $x_n : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow$

$\mathbb{R}$ es la función implícitamente definida por $F(x_1, \dots, x_n) = 0$ y $p = (x_1^0, \dots, x_{n-1}^0, x_n^0(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0))$.

Entonces p es de multiplicidad simple si y solo si $x_n^0 = (x_1^0, \dots, x_{n-1}^0) \in F^{-1}(u) \cap$

$G^{-1}(v)$ es una raíz simple de Q .

Prueba. Sea $p \in F^{-1}(u) \cap G^{-1}(v) = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = u, G(x) = v\}$. Supongamos

que $\frac{\partial F(p)}{\partial x_n} \neq 0$. Sea $p = (x_1^0, \dots, x_n^0)$. Entonces por el teorema de la función implícita

(ver Marsden [11]) existe $x_n : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, definida en una vecindad

de $(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0)$ tal que $x_n^0(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0) = x_n^0$ y $F(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n(x_1, \dots, x_{n-1})) = u$.

Definimos $Q(x_1, \dots, x_{n-1}) = G(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n(x_1, \dots, x_{n-1}))$. Entonces x_n^0 es raíz de

Q , es decir, $Q(x_n^0) = G(p) = 0$. Además sea $Q = G \circ \psi$, donde $\psi : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R} :$

$(x_1, \dots, x_{n-1})^T \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n(x_1, \dots, x_{n-1}))^T$, donde T significa la transpuesta.

Entonces la derivada de Q esta dada por $DQ = DG \cdot D\psi$, donde

$$(DF) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}}, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right) = \left(A, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right),$$

$$(DG) = \left(\frac{\partial G}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial G}{\partial x_{n-1}}, \frac{\partial G}{\partial x_n} \right) = \left(B, \frac{\partial G}{\partial x_n} \right),$$

$$D\psi = \begin{pmatrix} Id_{(n-1) \times (n-1)} \\ Dx_n \end{pmatrix}$$

$$Dx_n = - \left(\frac{\partial F}{\partial x_n} \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial (x_1, \dots, x_{n-1})} \in M_{1 \times (n-1)}.$$

Por lo tanto

$$DQ = \left(B, \frac{\partial G}{\partial x_n} \right) \left(Id_{(n-1)}, Dx_n \right)^T = B + \frac{\partial G}{\partial x_n} Dx_n = B - \frac{\partial G}{\partial x_n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_n} \right)^{-1} A$$

$\Rightarrow$ Sea $\bar{\alpha} = \frac{\partial G}{\partial x_n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_n} \right)^{-1}$. Entonces

$$\bar{\alpha} \nabla F + \nabla G = \left(\bar{\alpha} A, -\frac{\partial F}{\partial x_n} \right) + \left(B, \frac{\partial G}{\partial x_n} \right) = (\bar{\alpha} A + B, 0) = (DQ, 0)$$

Si $DQ = 0$ entonces $\nabla F \parallel \nabla G$, por lo tanto si $\nabla F(p) \not\parallel \nabla G(p)$ entonces $DQ(x_n^0) \neq 0$, es decir, si p es un punto de multiplicidad simple entonces x_n^0 es raíz simple de Q .

$\Leftarrow$ Supongamos que $\nabla F(p) \parallel \nabla G(p)$. Entonces existe $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ tal que $\alpha \nabla F(p) + \beta \nabla G(p) = 0$. Si $\beta = 0$ entonces $\nabla F(p) = 0$ lo cual es una contradicción dado que p es un punto regular, análogamente se sigue para α . Entonces podemos suponer que

$$(0, 0) = \alpha \nabla F + \nabla G = \left(\alpha A + B, \alpha \frac{\partial F}{\partial x_n} + \frac{\partial G}{\partial x_n} \right)$$

De la segunda entrada obtenemos que $\alpha = \bar{\alpha}$, y sustituyendo este resultado en la primera entrada se tiene $0 = \bar{\alpha} A + B = DQ$. Por lo tanto $\nabla F(p) \parallel \nabla G(p)$ implica que $DQ(x_n^0) = 0$. ■

Definición 4.9. Sean $F, G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables. Sean $u, v \in \mathbb{R}$ valores (posiblemente críticos) de F y G respectivamente. Sea $p \in F^{-1}(u) \cap G^{-1}(v)$. Denotamos $p = (x_1^0, \dots, x_n^0)$. Supongamos que $\frac{\partial F(p)}{\partial x_n} \neq 0$. Sea $Q : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como en la proposición 4.8. Decimos que p es de multiplicidad simple si $x^0 = (x_1^0, \dots, x_{n-1}^0)$ es raíz simple de Q .

Observación. De la definición anterior, si u, v son valores regulares de F y G respectivamente, entonces $F^{-1}(u)$ y $G^{-1}(v)$ son subvariedades de $\mathbb{R}^n$ y por lo tanto tiene sentido aplicar la definición 4.4. En ese caso quisiéramos ver que un punto en la intersección de $F^{-1}(u)$ y $G^{-1}(v)$ es de multiplicidad mayor que uno independientemente de si usamos la definición 4.4 ó 4.9.

Considere el polinomio (4.5) el cual se obtiene de despejar a σ_3 de la definición de Π_h y sustituyendola en la definición de M_j . Entonces $Q = 0$ equivale a que el plano Π_h y la variedad semialgebraica M_j se intersecten. Por la definición 4.9 se tiene que una raíz de multiplicidad mayor que uno de Q corresponde a un punto en $\Pi_h \cap M_j$ de multiplicidad mayor que uno. Dichas raíces se pueden caracterizar de manera más simple con el polinomio P que aparece en la siguiente

Proposición 4.10. *Una raíz $(\sigma_1^0, \sigma_2^0) \in [-1, 1] \times \mathbb{R}$ de la Q definida en (4.5) tiene multiplicidad mayor que uno si y solo si*

$$\sigma_2^0 = 0 \tag{4.6}$$

y el polinomio

$$P(\sigma_1) = (h - \sigma_1)(1 - \sigma_1^2) - \frac{1}{2}j^2 \tag{4.7}$$

tiene una raíz múltiple σ_1^0 .

Prueba. El polinomio de Taylor de Q en las variables σ_1, σ_2 es de la siguiente forma

$$Q(\sigma_1, \sigma_2) = Q(\sigma_1^0, \sigma_2^0) + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial Q}{\partial \sigma_i}(\sigma_1^0, \sigma_2^0)(\sigma_i - \sigma_i^0) + \dots + R(\sigma_1^0, \sigma_2^0)$$

donde $R(\sigma_1^0, \sigma_2^0)$ es el residuo. La raíz (σ_1^0, σ_2^0) tiene multiplicidad mayor que uno

si y solo si

$$(\sigma_2^0)^2 + j^2 - 2(h - \sigma_1^0)(1 - (\sigma_1^0)^2) = 0 \quad (4.8)$$

y

$$(2(1 - (\sigma_1^0)^2) + 4\sigma_1^0(h - \sigma_1^0), 2\sigma_2^0) = (0, 0). \quad (4.9)$$

Las dos ecuaciones anteriores corresponden al término constante y al término lineal respectivamente del polinomio de Taylor para Q . De (4.9) es claro que la igualdad en la segunda entrada se da si $\sigma_2^0 = 0$. Sustituyendo este resultado en (4.8) obtenemos

$$j^2 - 2(h - \sigma_1^0)(1 - (\sigma_1^0)^2) = 0 \quad (4.10)$$

Dado que σ_1 debe ser una raíz múltiple derivamos (4.10) y al derivar se obtiene justamente el término de la primera entrada del lado izquierdo de la ecuación (4.9).

Si definimos

$$P(\sigma_1) = -\frac{1}{2}Q(\sigma_1, \sigma_2 = 0) = (h - \sigma_1)(1 - \sigma_1^2) - \frac{1}{2}j^2$$

se tiene demostrado la proposición. ■

Proposición 4.11 (Cushman y Bates). *Sea σ_2 y $P(\sigma_1)$ definidos como en (4.6) y (4.7) respectivamente. Entonces Σ está parametrizada por $h(s) = \frac{3}{2}s - \frac{1}{2s}$ y $j(s) = \pm\left(\frac{1-s^2}{\sqrt{-s}}\right)$, para $s \in [-1, 0) \cup \{1\}$.*

Prueba. Para toda $(h, j) \in \Sigma$ y σ_1 una raíz múltiple, el polinomio P definido en (4.7) se puede factorizar como

$$(\sigma_1 - s)^2(\sigma_1 - t) = \sigma_1^3 - (2s + t)\sigma_1^2 + (2st + s^2)\sigma_1 - ts^2 \quad (4.11)$$

para algún $s \in [-1, 1]$ y $t \in \mathbb{R}$. Igualando coeficiente a coeficiente de (4.7) y (4.11) se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} h &= 2s + t, \\ -1 &= 2st + s^2, \\ -\frac{1}{2}j^2 + h &= -ts^2. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Si $s = 0$, entonces la segunda igualdad nos lleva a que $0 = 1$, lo cual es una contradicción. Entonces $s \neq 0$. Despejando a t de dicha igualdad y sustituyendola en la primera igualdad se tiene

$$h(s) = 2s - \frac{1}{2s} - \frac{s^2}{2s} = \frac{3}{2}s - \frac{1}{2s}$$

Sustituyendo t y h en la tercera igualdad de (4.12) se tiene

$$\begin{aligned} j^2 &= 2\left(\frac{3}{2}s - \frac{1}{2s} + s^2\left(-\frac{1}{2s} - \frac{s}{2}\right)\right) \\ &= 3s - \frac{1}{s} - s - s^3 = 2s - \frac{1}{s} - s^3 \\ &= -\frac{1}{s}(1 - 2s^2 + s^4) = -\frac{1}{s}(1 - s^2)^2. \end{aligned}$$

Dado que j debe ser real entonces $s \in [-1, 0) \cup \{1\}$. ■

La siguiente proposición resume los resultados obtenidos hasta ahora acerca del conjunto de valores críticos de la función de energía-momento:

Proposición 4.12. *Sea $\mathcal{EM}$ la función de energía-momento definida en (4.1) y sea $(h, j) \in \text{im } \mathcal{EM}$. Sea Σ el conjunto de valores críticos de $\mathcal{EM}$ y sea M_j la variedad semialgebraica definida en la sección 3.2.2. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. Si $j \neq 0$ entonces h es un valor crítico de $H|_{M_j}$. Si $j = 0$ entonces $h = \pm 1$.
2. El punto (h, j) es un valor crítico de $\mathcal{EM}$.
3. Existe un punto $\sigma^0 \in \Pi_h \cap M_j$ con multiplicidad mayor que uno.
4. Existe (σ_1^0, σ_2^0) tal que el polinomio de Taylor de $Q(\sigma_1, \sigma_2)$ evaluado en (σ_1^0, σ_2^0) no tiene término constante o lineal, donde $(\sigma_1, \sigma_2) \in (-1, 1) \times \mathbb{R}$.
5. Existe (σ_1^0, σ_2^0) tal que $\sigma_2^0 = 0$ y $P(\sigma_1) = (h - \sigma_1)(1 - \sigma_1^2) - \frac{1}{2}j^2$ tiene una raíz σ_1^0 de multiplicidad mayor que uno.

De acuerdo a la proposición 4.11, el conjunto de valores críticos determinan la siguiente curva, que denotamos por $\pm\mathcal{B}$, excepto si $s = 1$, en cuyo caso $h(1) = 1$ y $j(1) = 0$.

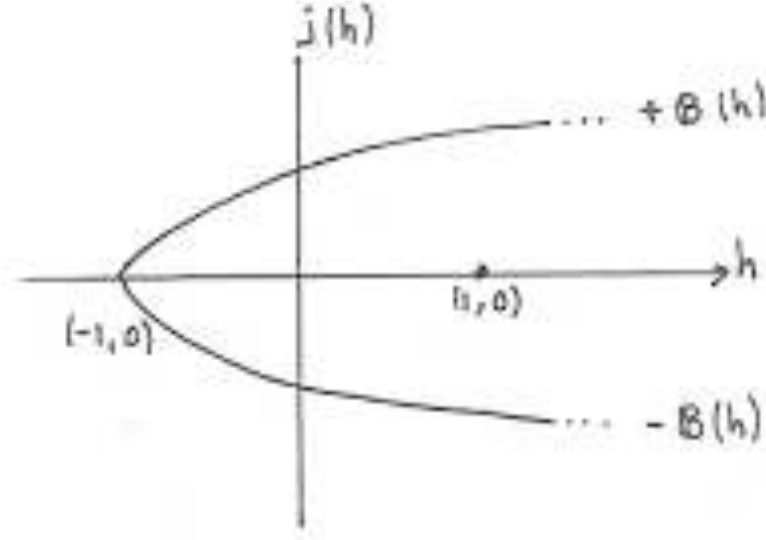
Proposición 4.13. *La curva $\pm(\mathcal{B})$ tiene la siguiente expresión*

$$j = \pm \frac{2}{9}(3 - h^2 + h\sqrt{h^2 + 3})\sqrt{h + \sqrt{h^2 + 3}} = \pm(\mathcal{B}(h)) \quad (4.13)$$

para $h \geq -1$.

Prueba. Tomamos la expresión de $h(s)$ obtenida en la proposición 4.11 y multiplicando a ambos lados por $2s$ e igualando a cero se tiene la siguiente ecuación de segundo grado $3s^2 - 2hs - 1 = 0$, cuya solución es $s = \frac{h \pm \sqrt{h^2 + 3}}{3}$. Sustituyendo la expresión anterior de s en $j(s)$, igualmente obtenida en la proposición 4.11 y elevando al cuadrado se tiene

$$j^2 = -\frac{3}{h \pm \sqrt{h^2 + 3}} \left(1 - \left(\frac{h \pm \sqrt{h^2 + 3}}{3} \right)^2 \right)^2,$$

Figura 4.1: Valores críticos de la función $\mathcal{EM}$.

dato que j^2 es una cantidad mayor o igual a cero, tomamos la raíz negativa de s , entonces se tiene

$$j^2 = -\frac{3}{h - \sqrt{h^2 + 3}} \left(1 - \left(\frac{h - \sqrt{h^2 + 3}}{3} \right)^2 \right)^2.$$

Desarrollando y agrupando términos obtenemos

$$j^2 = -\frac{3}{h - \sqrt{h^2 + 3}} \left(\frac{2}{9} \right)^2 \left(3 - h^2 + h\sqrt{h^2 + 3} \right)^2.$$

Multiplicando esta última expresión por $\frac{h + \sqrt{h^2 + 3}}{h + \sqrt{h^2 + 3}}$ se tiene

$$j = \pm \frac{2}{9} (3 - h^2 + h\sqrt{h^2 + 3}) \sqrt{h + \sqrt{h^2 + 3}} = \pm (\mathcal{B}(h)),$$

tal como lo deseabamos. ■

Observación . La curva $\mathcal{B}(h)$ tiene dos ramas; una rama esta parametrizada por $+(\mathcal{B})$ y la otra rama esta parametrizada por $-(\mathcal{B})$. Puesto que $j = 0$ cuando $h = -1$, en este punto las ramas se unen de forma continua, es decir,

$$\lim_{h \rightarrow -1} j(h) = \lim_{h \rightarrow -1} \pm(\mathcal{B}(h)) = \pm(\mathcal{B}(-1)) = 0.$$

También en este punto se tiene que las ramas no se unen de forma suave, es decir

$$\begin{aligned} \left. \frac{dj}{dh} \right|_{h=-1} &= \pm \frac{2}{9} \left[\left(3 - h^2 + h\sqrt{h^2 + 3} \right) \left(\frac{\sqrt{h^2 + 3} + h}{2\sqrt{h^2 + 3}\sqrt{h + \sqrt{h^2 + 3}}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\sqrt{h + \sqrt{h^2 + 3}} \right) \left(-2h + \sqrt{h^2 + 3} + \frac{h^2}{\sqrt{h^2 + 3}} \right) \right] \Big|_{h=-1} \\ &= \pm \frac{2}{9} \left[\frac{(0)(1)}{(2)(2)} + \frac{(1)(4 + 2 + 3)}{2} \right] = \pm 1 \end{aligned}$$

El punto $(1, 0) \in \Sigma$ es un punto aislado dado que no esta en $\pm(\mathcal{B})$ y por lo tanto es un valor crítico aislado de $\mathcal{EM}$.

Físicamente el punto crítico $(0, 0, -1, 0, 0, 0)$ representa a una partícula que esta en equilibrio estable; por otro lado, el punto crítico $(0, 0, 1, 0, 0, 0)$ representa a una partícula que se encuentra en equilibrio inestable. En ambos casos la energía total es puramente energía potencial. Los demás puntos que están sobre la curva $(h, \pm(\mathcal{B}(h)))$ determinan puntos de equilibrio relativos, tal como se dice al inicio de este capitulo.

Observación. Es claro que puntos en TS^2 con velocidad cero tienen momento angular cero. Por otro lado, si sabemos que un punto en TS^2 tiene momento angular cero eso no implica que su velocidad sea cero. Ésto es así porque cualquier partícula que se mueva en el plano que contenga al eje de rotación con velocidad

distinta de cero tiene su momento angular cero. Por otro lado, cualquier partícula que gire alrededor del eje z , manteniendo una distancia constante con el mismo (i.e. órbitas circulares), tiene su momento angular distinto de cero. Desde luego también podemos tener partículas que sigan trayectorias más complicadas con momento angular distinto de cero, que físicamente se ven como una “combinación” de las trayectorias descritas anteriormente.

Más adelante se mostrará que los valores críticos $(\pm 1, 0)$ de la función $\mathcal{EM}$ son especiales porque los correspondientes puntos críticos $p = (\pm 1, 0, 0)$ del hamiltoniano reducido H_0 son puntos singulares del espacio reducido M_0 .

4.2. Topología de $H_j^{-1}(h)$

A continuación describiremos la topología de las fibras de el hamiltoniano reducido $H_j(h) : M_j \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

Proposición 4.14. *El punto (h, j) es un valor crítico de la función de energía-momento definida en (4.1) si y solo si la línea*

$$l_h : \frac{1}{2}\sigma_3 + \sigma_1 = h \text{ y } \sigma_2 = 0 \quad (4.14)$$

intersecta a la curva

$$\mathcal{F} : \sigma_3(1 - \sigma_1^2) = j^2, \sigma_2 = 0, |\sigma_1| \leq 1, \sigma_3 \geq 0 \quad (4.15)$$

en un punto $\sigma^0 = (\sigma_1^0, 0, \sigma_3^0)$ con multiplicidad mayor que uno

Prueba. De la definición de l_h podemos despejar a σ_3 y sustituirla en la definición de $\mathcal{F}$ para obtener la ecuación $2(h - \sigma_1)(1 - \sigma_1^2) = j^2$. Si definimos el polinomio

$P(\sigma_1) = (h - \sigma_1)(1 - \sigma_1^2) - \frac{1}{2}j^2$, entonces $P(\sigma_1) = 0$ equivale a intersectar l_h y $\mathcal{F}$. Por la definición 4.9 el punto $(\sigma_1^0, 0, \sigma_3^0)$ es de multiplicidad simple si y solo si σ_1^0 es una raíz simple de P . Aquí por supuesto tenemos dos casos:

1. Si $j = 0$, entonces $P(\sigma_1) = (h - \sigma_1)(1 - \sigma_1)(1 + \sigma_1)$. Si $h \neq \pm 1$ entonces $P(\sigma_1)$ tiene solo raíces simples. Si $h = \pm 1$ entonces $\sigma_1^0 = \pm 1$ es una raíz múltiple de $P(\sigma_1)$.
2. Si $j \neq 0$ tomamos la derivada $\frac{dP}{d\sigma_1}|_{\sigma_1^0} = -(1 - \sigma_1^2) + 2\sigma_1(h - \sigma_1)|_{\sigma_1^0} = 0$ si y solo si $-1 + (\sigma_1^0)^2 - 2\sigma_1^0 h + 2(\sigma_1^0)^2 = 0$ si y solo si $h(\sigma_1^0) = \frac{3}{2}\sigma_1^0 - \frac{1}{2\sigma_1^0}$. Sustituyendo $h(\sigma_1^0)$ en $P = (h - \sigma_1)(1 - \sigma_1^2) - \frac{1}{2}j^2 = 0$ tenemos que $j(\sigma_1^0) = \pm\left(\frac{1 - (\sigma_1^0)^2}{\sqrt{-\sigma_1^0}}\right)$. Por lo tanto σ_1^0 es una raíz múltiple de $P(\sigma_1)$ si y solo si h y j tienen las parametrizaciones anteriores y que justamente coinciden con los valores críticos de la función $\mathcal{EM}$ obtenidas por ejemplo en la proposición 4.3.

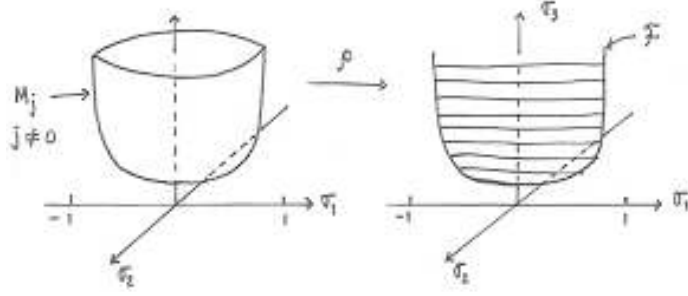
■

Sea ρ la proyección siguiente:

$$\rho : M_j \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \mapsto (\sigma_1, 0, \sigma_3). \quad (4.16)$$

Notemos que si $(\sigma_1, 0, \sigma_3) \in \rho(M_j)$ entonces $\sigma_3(1 - \sigma_1^2) \geq j^2$, $|\sigma_1| \leq 1$, $\sigma_3 \geq 0$.

La curva $\mathcal{F}$ definida en (4.15) es la frontera de la imagen de la proyección de M_j bajo la función ρ . En efecto, geométricamente la frontera de la desigualdad anterior es justamente cuando se dá la igualdad, es decir $\sigma_3(1 - \sigma_1^2) = j^2$. Por otra parte, la función ρ proyecta todo punto de M_j sobre el plano formado por (σ_1, σ_3) , en particular todo punto sobre la frontera de M_j (digamos la "silueta" de M_j) bajo la proyección de ρ debe satisfacer que $\sigma_3(1 - \sigma_1^2) = j^2$, pero esto es nuevamente la

Figura 4.2: La imagen del mapeo de proyección ρ .

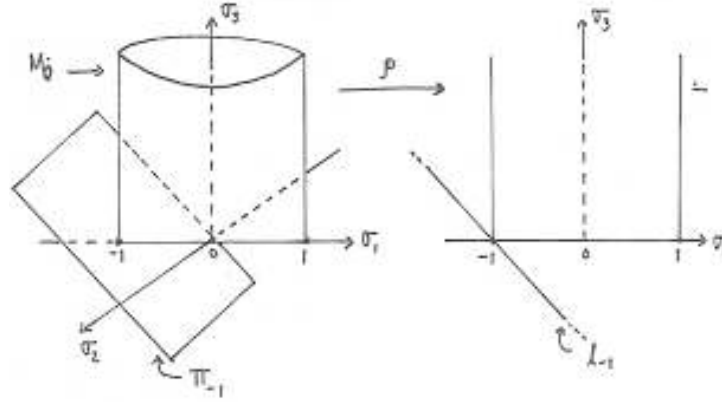
definición de la curva $\mathcal{F}$ definida en (4.15). Ver figura 4.2.

Observemos que si p es un punto en el interior de $\rho(M_j)$ entonces la fibra $\rho^{-1}(p)$ consiste en dos puntos, mientras que si p está en la frontera de $\rho(M_j)$ entonces la fibra consiste en un solo punto. En efecto, por definición tenemos:

$$\begin{aligned}
 \rho^{-1}(p) &= \{(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \in M_j \subseteq \mathbb{R}^3 : \rho(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = p\} \\
 &= \{(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \in M_j : \sigma_3(1 - \sigma_1^2) - j^2 \geq 0\} \\
 &= \{(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \in M_j : \sigma_2^2 \geq 0\}.
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Observación. El punto σ_1^0 es una raíz de multiplicidad 2 en el intervalo $[-1, 1]$ para el polinomio $P(\sigma_1)$ definido en (4.7), sin embargo no olvidemos que $P(\sigma_1)$ es un polinomio de grado 3 y por lo tanto tiene otra raíz, dicha raíz aquí no la mostramos pero de acuerdo a la ecuación (4.11) sabemos que se encuentra en el intervalo $(1, \infty)$.

Proposición 4.15. Sea $\mathcal{B}(h)$ la función definida por la proposición 4.13. La topología de las fibras del Hamiltoniano reducido H_j son:

Figura 4.3: Topología de $H_j^{-1}(h)$ con $h = -1$ y $j = 0$.

Condiciones sobre (h, j)	Topología de $H_j^{-1}(h)$
1. $j = \pm \mathcal{B}(h)$, $h \geq -1$	Un punto
2. $ j < \mathcal{B}(h)$, $h > -1$, $(h, j) \neq (1, 0)$	S^1 suave
3. $(1, 0)$	S^1 topológico con un punto singular conical

Prueba. Caso 1. Cuando $h = -1$, se tiene por la proposición 4.13 que $j = 0$. Entonces por la proposición 4.14 la línea l_{-1} intersecta a la curva $\mathcal{F}$ en el punto $(\sigma_1, 0, \sigma_3)$ tal que $\frac{1}{2}\sigma_3 + \sigma_1 = -1$ y $\sigma_3(1 - \sigma_1^2) = 0$. Despejando a σ_3 de la primera de las ecuaciones anteriores y sustituyendo en la segunda obtenemos la siguiente ecuación $-2(1 + \sigma_1)(1 - \sigma_1^2) = 0$. Es claro que $\sigma_1 = \pm 1$ son las soluciones de dicha ecuación. Si tomamos $\sigma_1 = 1$ y lo sustituimos en la definición de l_{-1} se tiene que $\sigma_3 = -4$, lo cual no puede ocurrir dado que $\sigma_3 \in M_0$ y por lo tanto $\sigma_3 \geq 0$. Entonces tomamos el valor de $\sigma_1 = -1$ y sustituyendo en l_{-1} obtenemos que $\sigma_3 = 0$. Por lo tanto $H_0^{-1}(-1) = (-1, 0, 0)$, el cual es un punto singular de la variedad semialgebraica M_0 . Ver figura 4.3.

Cuando $|j| = \mathcal{B}(h)$ y $h > -1$, por la proposición (4.14) la línea l_h intersecta a la curva $\mathcal{F}$ en un punto no singular que denotamos por $p_{h,j}$. Entonces $\rho(H_j^{-1}(h)) =$

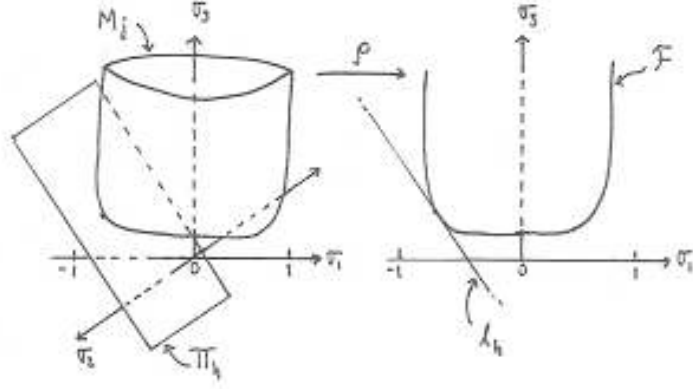


Figura 4.4: Topología de $H_j^{-1}(h)$ con $|j| = \mathcal{B}(h)$ y $h > -1$.

$p_{h,j}$. Dado que todo punto en $\mathcal{F}$ viene de un solo punto bajo la proyección ρ , tenemos que $H_j^{-1}(h)$ es un punto. Ver figura 4.4.

2. Cuando $|j| < \mathcal{B}(h)$, $h > -1$ y $(h, j) \neq (1, 0)$, la línea l_h intersecta a $\rho(M_j)$ en un segmento de línea cerrada $L_{h,j}$ cuyos puntos extremos están sobre $\mathcal{F}$. Para todo punto en el interior de $L_{h,j}$, la fibra de ρ consiste de dos puntos (pues $2(h - \sigma_1)(1 - \sigma_1^2) - j^2 = \sigma_2^2 > 0$) mientras que sobre los puntos extremos de $L_{h,j}$, la fibra de ρ consiste de un solo punto (pues $\sigma_2 = 0$). Entonces

$$\rho^{-1}(L_{h,j}) = \{(\sigma_1, \pm\sigma_2, \sigma_3) \in M_j : \sigma_2 = \sqrt{2(h - \sigma_1)(1 - \sigma_1^2) - j^2}\}.$$

Es claro geoméricamente que $\Pi_h \cap M_j = \rho^{-1}(L_{h,j})$. Como $H_j^{-1}(h) = \Pi_h \cap M_j$ concluimos que $H_j^{-1}(h) = \rho^{-1}(L_{h,j})$, el cual es un círculo topológico. Dado que (h, j) es un valor regular de $\mathcal{EM}$ y por la proposición 4.1, el valor de h es un valor regular para el hamiltoniano reducido H_j . Por lo tanto $H_j^{-1}(h)$ es un círculo suave. Ver figura 4.5.

3. Cuando $h = 1$, la línea l_1 intersecta $\rho(M_0)$ en un segmento de línea cerrada

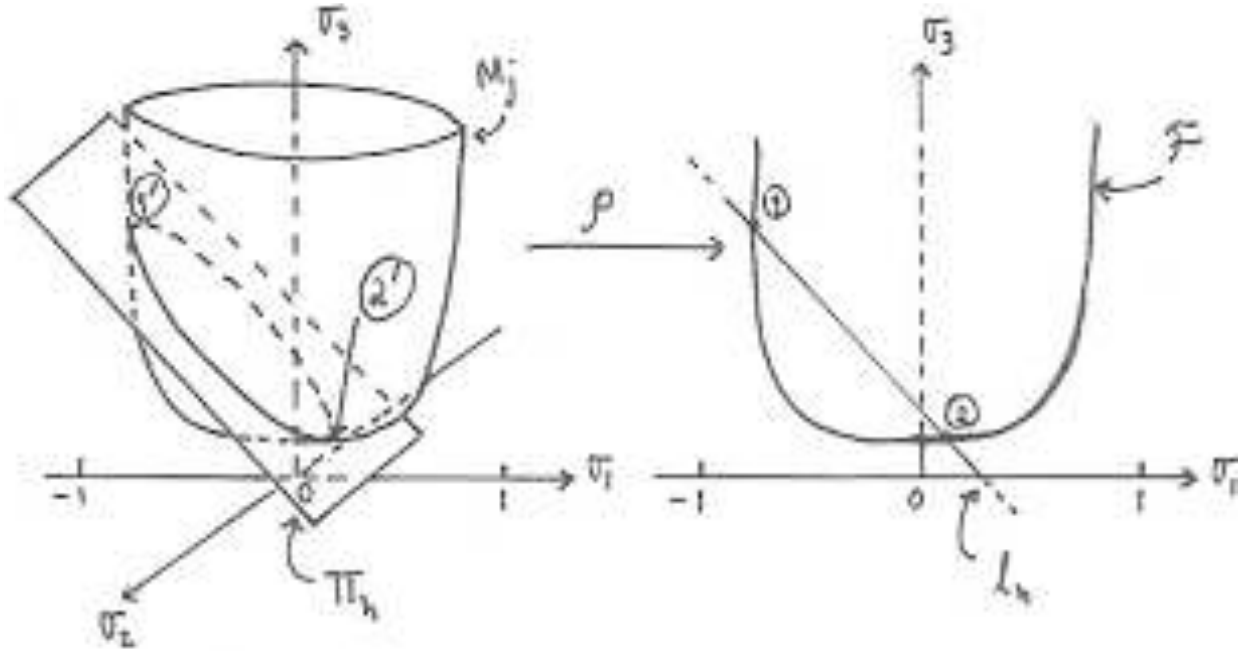


Figura 4.5: Topología de $H_j^{-1}(h)$ con $|j| < \mathcal{B}(h)$, $h > -1$ y $(h, j) \neq (1, 0)$.

$L_{1,0}$. Por lo tanto $H_0^{-1}(1) = \rho^{-1}(L_{1,0})$ es un círculo topológico.

Como una variedad semialgebraica en $\mathbb{R}^3$, el conjunto de nivel $H_0 = 1$ se define por

$$\begin{aligned}\sigma_2^2 &= \sigma_3(1 - \sigma_1^2) \\ 1 &= \frac{1}{2}\sigma_3 + \sigma_1.\end{aligned}$$

Eliminando σ_3 de las ecuaciones anteriores se obtiene

$$\begin{aligned}\sigma_2^2 &= 2(1 - \sigma_1)(1 - \sigma_1^2) = 2(1 - \sigma_1)^2(1 + \sigma_1) \\ &= 2(1 - \sigma_1)^2(2 - (1 - \sigma_1)) = 4(1 - \sigma_1)^2 - 2(1 - \sigma_1)^3.\end{aligned}\quad (4.18)$$

Por lo tanto $H_0^{-1}(1)$ tiene una singularidad cónica en $(1, 0, 0)$. En efecto, sea $\alpha(\sigma_1) = (\sigma_1, \pm\sqrt{4(1 - \sigma_1)^2 - 2(1 - \sigma_1)^3}, 2(1 - \sigma_1))$ una curva en $\mathbb{R}^3$. Un cálculo

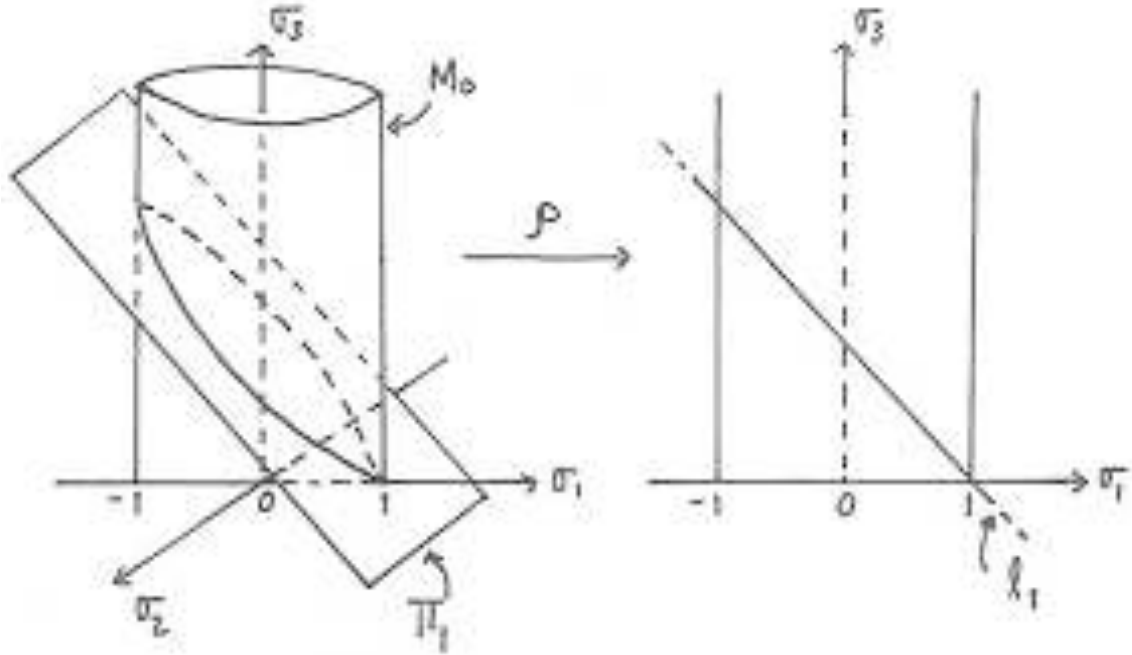


Figura 4.6: Topología de $H_j^{-1}(h)$ con $h = 1$ y $j = 0$.

sencillo puede demostrar que el límite cuando $\sigma_1 \rightarrow 1$ por la derecha o por la izquierda se tiene entonces que $\alpha \rightarrow (1, \pm 2, -2)$ respectivamente. Por lo tanto tenemos una singularidad en el punto $(1, 0, 0) \in M_0$. Decimos que tiene una singularidad cónica en este punto pues podemos ajustar un cono tangente a $H_0^{-1}(1)$ en $(1, 0, 0)$ tal que este punto es el vértice del cono.

En los demás puntos $H_0^{-1}(1)$ es suave. Ver figura 4.6. ■

4.3. Topología de $\mathcal{EM}^{-1}(h, j)$

A continuación describiremos la topología de las fibras de la función de energía-momento del péndulo esférico.

Definición 4.16. Sean N_1, N_2 variedades algebraicas en M_1, M_2 , respectivamente, donde M_i es variedad diferenciable. Decimos que $f : N_i \rightarrow \mathbb{R}$ es suave si existe

$F \in C^\infty(M_i)$ tal que $F|_{N_i} = f$. En ese caso denotamos $f \in C^\infty(N_i)$. Sea $\pi : N_1 \longrightarrow N_2$ suprayectivo. Decimos que π es suave si para toda $f \in C^\infty(N_2)$ se tiene que $f \circ \pi \in C^\infty(N_1)$.

Sea $\pi_j : (J|TS^2)^{-1}(j) \rightarrow M_j$ la función de reducción dada por $\pi_j := \mu \circ \lambda_2$, donde μ y λ_2 se muestran en (3.10). Por la definición 4.16 tenemos que π_j es suave si para toda $f \in C^\infty(M_j)$ se tiene que $f \circ \pi_j \in C^\infty(J^{-1}(j))$.

Lema 4.17. *La función $\xi : C^\infty(M_j) \rightarrow C^\infty(J^{-1}(j)) : f \mapsto \pi_j^* F := F \circ \pi_j$ esta bien definida, donde $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ es cualquier función tal que $F|_{M_j} = f$.*

Prueba. (Siguiendo a Cushman y Bates [6, prueba 3.5]). Sea f una función suave sobre el espacio reducido M_j . Por definición, hay una función suave F sobre $\mathbb{R}^3$ tal que $F|_{M_j} = f$. Entonces $(\mu \circ \lambda_2)^* F$ es una función suave sobre $T\mathbb{R}^3$ siguiendo el diagrama (3.10). Por lo tanto $((\mu \circ \lambda_2)^* F)|_{J^{-1}(j)}$ es una función suave sobre $J^{-1}(j)$. Supongase que F^1 es una función suave tal que $F^1|_{M_j} = f$. Entonces $\mu^*(F - F^1)$ se anula sobre $V_j = \lambda_2(J^{-1}(j))$, es decir,

$$\mu^*(F - F^1)|_{V_j} = (F - F^1) \circ \mu|_{V_j} = (F - F^1)|_{M_j} = f - f = 0$$

Por consiguiente, $\lambda_2^*(\mu(F - F^1))$ se anula sobre $J^{-1}(j)$, es decir

$$\lambda_2^*(\mu(F - F^1))|_{J^{-1}(j)} = (\mu^*(F - F^1)) \circ \lambda_2|_{J^{-1}(j)} = \mu^*(F - F^1)|_{V_j} = 0$$

Entonces $((\mu \circ \lambda_2)^* F^1)|_{J^{-1}(j)} = ((\mu \circ \lambda_2)^* F)|_{J^{-1}(j)}$. Por lo tanto la función

$$\xi : C^\infty(M_j) \rightarrow C^\infty(J^{-1}(j)) : f \rightarrow ((\mu \circ \lambda_2)^* F)|_{J^{-1}(j)}$$

esta bien definida. Como $\pi_j = (\mu \circ \lambda_2)|_{J^{-1}(j)}$, se sigue que $\xi = \pi_j^*$. ■

Proposición 4.18. *Sea π_j la función de reducción definida anteriormente. Entonces*

1. *Como conjuntos se tiene*

$$\mathcal{EM}^{-1}(h, j) = \pi_j^{-1}(H_j^{-1}(h)). \quad (4.19)$$

2. *La función de reducción*

$$\pi_j : J^{-1}(j) \rightarrow M_j \subseteq \mathbb{R}^3 : (x, y) \rightarrow (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad (4.20)$$

es suave y tiene fibras

$$\pi_j^{-1}(m) = \begin{cases} S^1 & \text{si } M_j \text{ es suave en } m, \\ \text{un punto} & \text{si } M_j \text{ no es suave en } m. \end{cases}$$

Prueba.

1. De manera clara se tiene que $\mathcal{EM}^{-1}(h, j) = H^{-1}(h) \cap J^{-1}(j)$. También se puede ver del diagrama obtenido en (3.10) que la función de reducción π_j es suprayectiva y además $\pi_j^* H_j := H_j \circ \pi_j = H|J^{-1}(j)$. Por lo tanto $\pi_j^{-1}(H_j^{-1}(h)) = (H_j \circ \pi_j)^{-1}(h) = (H|J^{-1}(j))^{-1}(h) = H^{-1}(h) \cap J^{-1}(j)$.
2. Por demostrar que dada $f \in C^\infty(M_j)$ se tiene $f \circ \pi_j \in C^\infty(J|TS^2)^{-1}(j)$. Supongamos que $f \in C^\infty(M_j)$. Entonces existe $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ tal que $F|_{M_j} = f$. La función de reducción π_j está definida por $\pi_j = \bar{\pi}_j|(J|TS^2)^{-1}(j)$ con $\bar{\pi}_j = \mu \circ \lambda_2$. Por el lema 4.17, $\bar{\pi}_j^* F \in C^\infty(J^{-1}(j))$. Entonces existe $\phi \in C^\infty(T\mathbb{R}^3)$ tal que $\bar{\pi}_j^* F = \phi|J^{-1}(j)$. Para demostrar que $\pi_j^* f$ es suave basta demostrar

que $\pi_j^* f = \phi_1|(J|TS^2)^{-1}(j)$, para alguna $\phi_1 \in C^\infty(TS^2)$. Sea $\phi_1 = \phi|TS^2$.

Entonces se tiene la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned}
 \phi_1|(J|TS^2)^{-1}(j) &= \phi_1|(J^{-1}(j) \cap TS^2) = (\phi|J^{-1}(j))|(J^{-1}(j) \cap TS^2) \\
 &= (\bar{\pi}_j^* F)|(J^{-1}(j) \cap TS^2) = \bar{\pi}_j^* F|(J|TS^2)^{-1}(j) \\
 &= F \circ \bar{\pi}_j|(J|TS^2)^{-1}(j) = F|M_j \circ \bar{\pi}_j|(J|TS^2)^{-1}(j) \\
 &= f \circ \bar{\pi}_j|(J|TS^2)^{-1}(j) = f \circ \pi_j = \pi_j^* f.
 \end{aligned}$$

Queda entonces demostrado que la función de reducción π_j es suave.

Ahora queremos demostrar que $\pi_j^{-1}(m)$ es homeomorfo a S^1 si M_j es diferenciable en m y a un punto en caso contrario. Observemos que M_j es suave en m si $m \neq (\pm 1, 0, 0)$. En efecto, la variedad semialgebraica M_j se puede ver como la gráfica de la función :

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_2^2 + j^2}{1 - \sigma_1^2},$$

con $|\sigma_1| \leq 1$. Si tomamos $\sigma_1 \neq \pm 1$ entonces esta función está bien definida.

Si además nos tomamos $\sigma_2 \neq 0$ y por lo tanto $\sigma_3 \neq 0$ entonces:

$$D(\sigma_3) = \left(\frac{\partial \sigma_3}{\partial \sigma_1}, \frac{\partial \sigma_3}{\partial \sigma_2} \right) = (a, b)$$

con $b \neq 0$. Por lo tanto la variedad semialgebraica es suave en m si y solo si $m \neq (\pm 1, 0, 0)$. De hecho sabemos de la sección 3.2.1 que si $j \neq 0$ entonces M_j es difeomorfa a $\mathbb{R}^2$ y, si $j = 0$ entonces los únicos puntos singulares de la variedad semialgebraica M_0 son $(\pm 1, 0, 0)$.

Lema 4.19. *Sea $m \in M_j$ y $m \neq \{(\pm 1, 0, 0)\}$. Entonces $\lambda_2^{-1}(\mu^{-1}(m)) =$*

$\pi_j^{-1}(m)$ es homeomorfa a S^1 .

Prueba. Por definición:

$$\pi_j^{-1}(m) = \{(x, y) \in TS^2 \cap J^{-1}(j) : \sigma_1 = x_3, \sigma_2 = y_3, \sigma_3 = \|y\|^2\}.$$

Sea Ψ la siguiente función:

$$\Psi_{(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, j)} : S^1 \rightarrow \pi_j^{-1}(m) : \theta \mapsto (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3). \quad (4.21)$$

Sea $m = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ un punto en M_j . Dado que $\sigma_1 = x_3$ es un parámetro, entonces x_1 y x_2 quedan definidas por este parámetro de la siguiente manera:

$$(x_1, x_2) = (\sqrt{1 - \sigma_1^2} \cos \theta, \sqrt{1 - \sigma_1^2} \sin \theta).$$

Por otro lado, las variables y_1 y y_2 quedan definidas por las ecuaciones $\langle x, y \rangle = 0$ y $x_1 y_2 - x_2 y_1 = j$, es decir:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{1 - \sigma_1^2} \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_3 y_3 \\ j \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sigma_1^2}} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sigma_1 \sigma_2 \\ j \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces es claro que la función Ψ está bien definida y es diferenciable y por lo tanto continua. Claramente Ψ es un encaje de S^1 a $\mathbb{R}^6$ y por lo tanto es un homeomorfismo sobre su imagen. Solamente nos falta por demostrar que la imagen de Ψ cae en $\pi_j^{-1}(m)$. Para toda $(x, y) \in \Psi(S^1)$ se satisfacen las

siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= (1 - \sigma_1^2)(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \sigma_1^2 = 1 \\
x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 &= \sqrt{1 - \sigma_1^2} \cos \theta \frac{-\sigma_1 \sigma_2 \cos \theta - j \sin \theta}{\sqrt{1 - \sigma_1^2}} \\
&\quad + \sqrt{1 - \sigma_1^2} \sin \theta \frac{-\sigma_1 \sigma_2 \sin \theta + j \cos \theta}{\sqrt{1 - \sigma_1^2}} + \sigma_1 \sigma_2 \\
&= -\sigma_1 \sigma_2 \cos^2 \theta - j \sin \theta \cos \theta - \sigma_1 \sigma_2 \sin^2 \theta \\
&\quad + j \sin \theta \cos \theta + \sigma_1 \sigma_2 = 0 \\
x_1 y_2 - x_2 y_1 &= \sqrt{1 - \sigma_1^2} \cos \theta \left(\frac{-\sigma_1 \sigma_2 \sin \theta + j \cos \theta}{\sqrt{1 - \sigma_1^2}} \right) \\
&\quad - \sqrt{1 - \sigma_1^2} \sin \theta \left(\frac{-\sigma_1 \sigma_2 \cos \theta - j \sin \theta}{\sqrt{1 - \sigma_1^2}} \right) \\
&= -\sigma_1 \sigma_2 \sin \theta \cos \theta + j \cos^2 \theta \\
&\quad + \sigma_1 \sigma_2 \sin \theta \cos \theta + j \sin^2 \theta = j \\
x_3 &= \sigma_1 \\
y_3 &= \sigma_2 \\
y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 &= \left(\frac{-\sigma_1 \sigma_2 \cos \theta - j \sin \theta}{\sqrt{1 - \sigma_1^2}} \right)^2 \\
&\quad + \left(\frac{-\sigma_1 \sigma_2 \sin \theta + j \cos \theta}{\sqrt{1 - \sigma_1^2}} \right)^2 + \sigma_2^2 \\
&= \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2 + j^2}{1 - \sigma_1^2} + \sigma_2^2 = \frac{\sigma_2^2 + j^2}{1 - \sigma_1^2} = \sigma_3
\end{aligned}$$

■

(Continuación de prueba de proposición 4.18.) Queda solo por demostrar que si $m = (\pm 1, 0, 0)$ entonces $\pi_j^{-1}(m)$ es un punto. Pero en este caso se tiene que $\sigma_1 = x_3 = \pm 1$, entonces $x_1 = x_2 = 0$. Además $\sigma_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0$. Entonces $\pi_j^{-1}(\pm 1, 0, 0) = \{(0, 0, \pm 1, 0, 0)\}$.

■

Basados en la proposición 4.18 vamos a demostrar la siguiente:

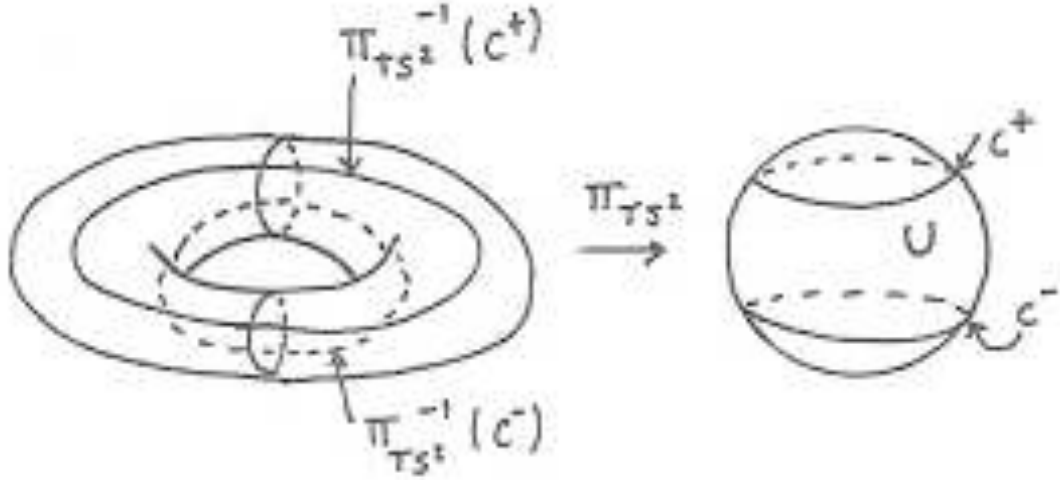
Proposición 4.20. *Sea $\mathcal{B}$ la función definida en la proposición 4.13. La topología de las fibras de la función de energía-momento viene dada por la siguiente tabla.*

Condiciones sobre (h, j)	Topología de $\mathcal{EM}^{-1}(h, j)$
1. $(h, j) = (-1, 0)$	Un punto
2. $ j = \mathcal{B}(h)$, $h > -1$	S^1 suave
3. $ j < \mathcal{B}(h)$, $-1 < h$ y $(h, j) \neq (1, 0)$	T^2 Un toro de dimensión dos suave
4. $(h, j) = (1, 0)$	T^* (T^2 con un círculo longitudinal pinchado en un punto)

Prueba. 1. Si $h = -1$ entonces $\mathcal{B}(h) = 0$. Entonces, por la proposición 4.15, $H_{j=0}^{-1}(h = -1) = \text{un punto}$. En la prueba de dicha proposición se muestra que dicho punto es $(-1, 0, 0)$, el cual es un punto donde M_0 no es suave. Entonces, por la proposición 4.18, tenemos que $\mathcal{EM}^{-1}(-1, 0) = \pi_j^{-1}(\{(-1, 0, 0)\}) = \text{un punto}$. (De la prueba de la proposición 4.18 podemos ver que dicho punto es $(0, 0, -1, 0, 0, 0)$.)

Observación. Otra manera de ver este caso es la siguiente. No es difícil probar que cuando $(h, j) = (-1, 0)$ entonces $\sigma_1 = -1$ y $\sigma_3 = 0$. De las definiciones de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, esto fuerza a que $(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = (0, 0, -1, 0, 0, 0)$.

2. En este caso seguimos en el inciso 1 de la proposición 4.15, con $h > -1$ y $j = \pm \mathcal{B}(h) \neq 0$. Por lo tanto $H_j^{-1}(h)$ es un punto $p_{h,j}$. De la proposición 4.18, la fibra $\mathcal{EM}^{-1}(h, j) = \pi_j^{-1}(H_j^{-1}(h)) = \pi_j^{-1}(\{p_{h,j}\}) = S^1$. Aquí usamos que, como $j \neq 0$ entonces M_j es suave en todos sus puntos y en particular en $p_{h,j}$.

Figura 4.7: Imagen de $\mathcal{EM}^{-1}(h, j)$ bajo π_{TS^2} .

3. Por demostrar que $\mathcal{EM}^{-1}(h, j) = T^2$ si $(h, j) \neq (1, 0)$ y $-1 < h$. Para ello trataremos de ver a $\mathcal{EM}^{-1}(h, j)$ como un tipo de haz sobre su imagen bajo la siguiente proyección:

$$\pi_{TS^2} : TS^2 \subset T\mathbb{R}^3 \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3 : (x, y) \rightarrow x \quad (4.22)$$

La fibra $\mathcal{EM}^{-1}(h, j) \subset TS^2 \subset T\mathbb{R}^3$ se define por

$$\begin{aligned} 1 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ 0 &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \\ h &= \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + x_3 \\ j &= x_1 y_2 - x_2 y_1. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Supongamos que $(x, y) \in \mathcal{EM}^{-1}(h, j)$ y $x \neq (0, 0, \pm 1)$. Entonces sobre $T_x S^2$, la imagen inversa $J^{-1}(j)$ es la línea afín

$$j = x_1 y_2 - x_2 y_1, \quad (4.24)$$

con $x_1 \neq 0$ o $x_2 \neq 0$. Tomando la segunda ecuación de (4.23), que es la que define a $T_x S^2$, junto con la ecuación (4.24) podemos obtener a y_1 y y_2 parametrizadas por x_1, x_2, x_3, y_3 de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} y_1 &= -\frac{1}{1-x_3^2}(jx_2 + x_1x_3y_3) \\ y_2 &= -\frac{1}{1-x_3^2}(-jx_1 + x_2x_3y_3). \end{aligned} \quad (4.25)$$

La línea parametrizada por y_3 en el plano tangente en x a la esfera viene dada por:

$$\left\{ \left(-\frac{jx_2 + x_1x_3y_3}{1-x_3^2}, -\frac{-jx_1 + x_2x_3y_3}{1-x_3^2}, y_3 \right) : y_3 \in \mathbb{R} \right\}, \quad (4.26)$$

cuya norma es:

$$\|y\|^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = \frac{j^2 + y_3^2}{1-x_3^2} := N_{y_3}. \quad (4.27)$$

Ahora N_{y_3} tiene un extremo en $y_3 = 0$, es decir:

$$\frac{dN_{y_3}}{dy_3} = \frac{2y_3}{1-x_3^2} = 0,$$

si y solo si $y_3 = 0$. La segunda derivada es claramente positiva, por lo que este extremo es un mínimo. Entonces si $x_3 \neq \pm 1$, el punto más cercano de $J^{-1}(j)$ al origen de $T_x S^2$ viene dado por el vector

$$y^0 = \left(\frac{-jx_2}{1-x_3^2}, \frac{jx_1}{1-x_3^2}, 0 \right).$$

Dado que $\|y\|^2 \geq \|y^0\|^2$ para toda $y \in J^{-1}(j) \cap T_x S^2$, se tiene entonces:

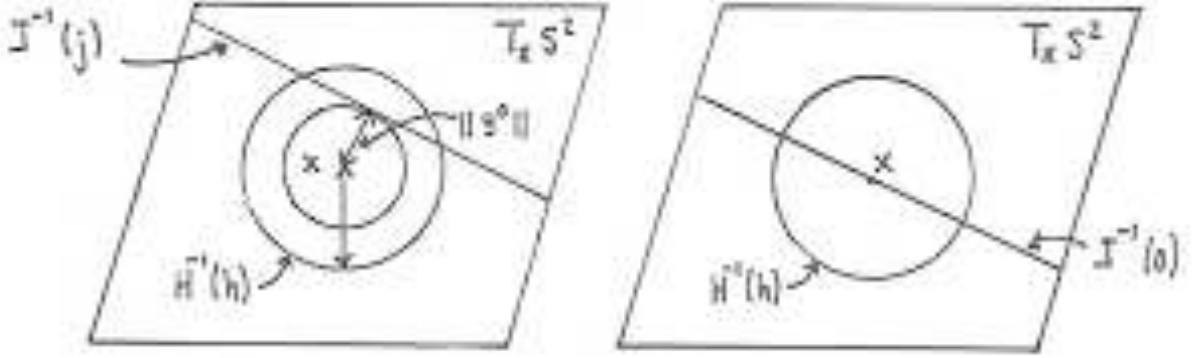


Figura 4.8: Geometría de $H^{-1}(h)$ y $J^{-1}(j)$ en un espacio tangente fijo $T_x S^2$.

$$\begin{aligned}
 2(H(x, y) - x_3) &= 2(h - x_3) = \|y\|^2 \\
 &\geq \|y^0\|^2 = 2(H(x, y^0) - x_3) \\
 &= 2\left(\frac{(x_1^2 + x_2^2)j^2}{2(x_1^2 + x_2^2)^2}\right) = \frac{j^2}{1 - x_3^2}
 \end{aligned}$$

Sea U el conjunto de todas las $x \in S^2$ tal que satisfacen la desigualdad anterior, es decir,

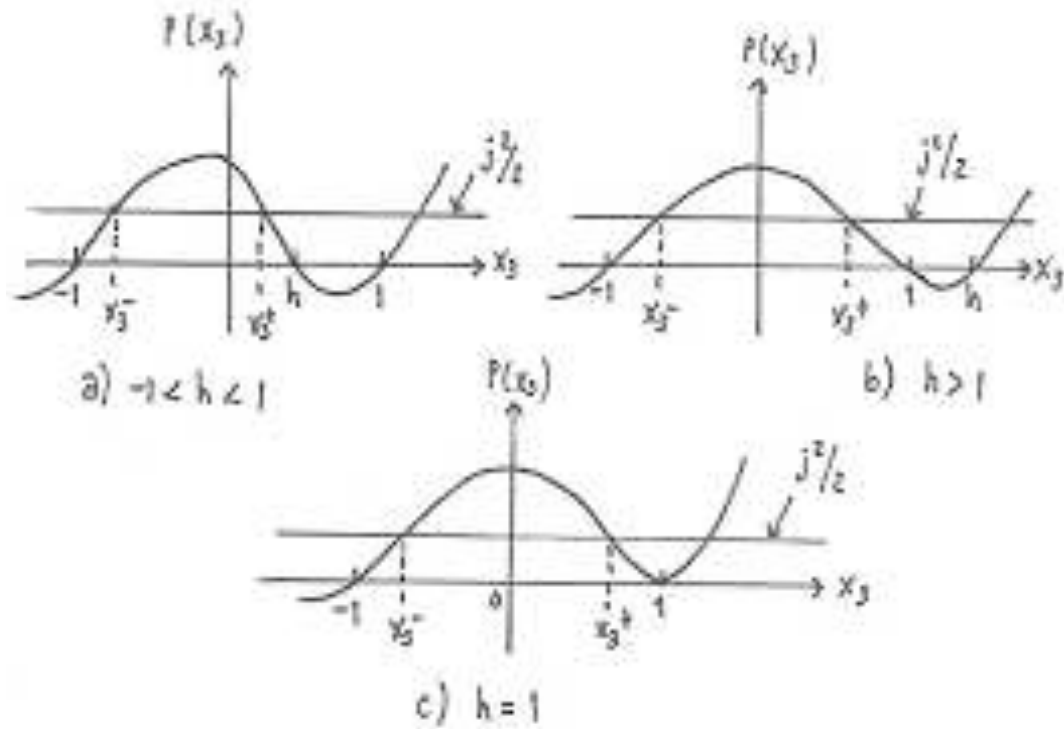
$$2(h - x_3)(1 - x_3^2) - j^2 \geq 0 \quad (4.28)$$

y además $\pi_{TS^2}(\mathcal{EM}^{-1}(h, j)) = U \subseteq S^2$.

Observación. Otra manera de obtener la desigualdad anterior es la siguiente.

De la sección 3.2.1 sabemos que cada punto de la variedad semialgebraica W debe satisfacer $\tau_4^2 + \tau_6^2 = \tau_3\tau_5$ con $\tau_3 \geq 0$ y $\tau_5 \geq 0$. Sustituyendo cada una de las τ_i con $i = 1, \dots, 6$ en términos de las (x, y) (ver (3.1)) se tiene que cada punto de la variedad W debe satisfacer $(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) = (x_1y_1 + x_2y_2)(x_1y_2 - x_2y_1)$. Utilizando las ecuaciones (4.23) en esta última expresión y despejando a y_3^2 se tiene que

$$0 \leq y_3^2 = 2(h - x_3)(1 - x_3^2) - j^2, \quad (4.29)$$

Figura 4.9: El polinomio $P(x_3)$.

la cuál es justamente la desigualdad obtenida en (4.28).

Ahora consideremos el polinomio $P(x_3)$ definido de la siguiente forma:

$$P(x_3) = (h - x_3)(1 - x_3^2). \quad (4.30)$$

Como $P(x_3)$ es un polinomio cúbico entonces, como ilustra el dibujo 4.9, tiene tres raíces. Las raíces son simples si $h \neq 1$. Es claro que el conjunto $P^{-1}([j^2/2, \infty))$ es la unión disjunta de un intervalo cerrado $[x_3^-, x_3^+]$ y un intervalo semiabierto. (Esta unión deja de ser disjunta cuando $j = 0$ y $h = 1$; este caso lo discutimos abajo en 4.) Es claro que el intervalo $[x_3^-, x_3^+]$ está contenido en el intervalo $[-1, 1]$. Entonces $[x_3^-, x_3^+]$ es el conjunto de todas las $x_3 \in [-1, 1]$ las cuales satisfacen la desigualdad (4.28).

Lema 4.21. Sea $\mathcal{B}(h)$ la función definida en la proposición 4.13 y por hipótesis se tiene además que $|j| < \mathcal{B}(h)$. Entonces el intervalo $[x_3^-, x_3^+]$ no puede degenerar a un punto pues $0 < \frac{1}{2}j^2 < \max P(x_3) = \frac{\mathcal{B}^2(h)}{2}$.

Prueba. Sea $P(x_3)$ el polinomio dado por (4.30), entonces la derivada de $P(x_3)$ se anula en $x_3^0 \in [x_3^-, x_3^+]$ si

$$\left. \frac{d(P(x_3))}{dx_3} \right|_{x_3^0} = \left. \frac{d}{dx_3} (x_3^3 + hx_3^2 - x_3 + h) \right|_{x_3^0} = 3(x_3^0)^2 - 2hx_3^0 - 1 = 0,$$

La solución de esta ecuación de segundo grado es

$$x_3^0 = \frac{h \pm \sqrt{h^2 + 3}}{3} := \pm x_3.$$

Dicho polinomio tiene un máximo local si

$$\left. \frac{d^2(P(x_3))}{dx_3^2} \right|_{\pm x_3} = 6 \frac{h \pm \sqrt{h^2 + 3}}{3} - 2h = \pm 2\sqrt{h^2 + 3} < 0.$$

Por lo tanto, tomando la raíz negativa se tiene que el valor máximo local que alcanza el polinomio $P(x_3)$ viene dado por:

$$\max P(x_3) := P(-x_3) = \frac{2}{27} (2h + \sqrt{h^2 + 3}) (3 - h^2 + h\sqrt{h^2 + 3}).$$

Por otro lado, sea $\mathcal{B}(h)$ dado por la ecuación (4.13), entonces elevando al cuadrado

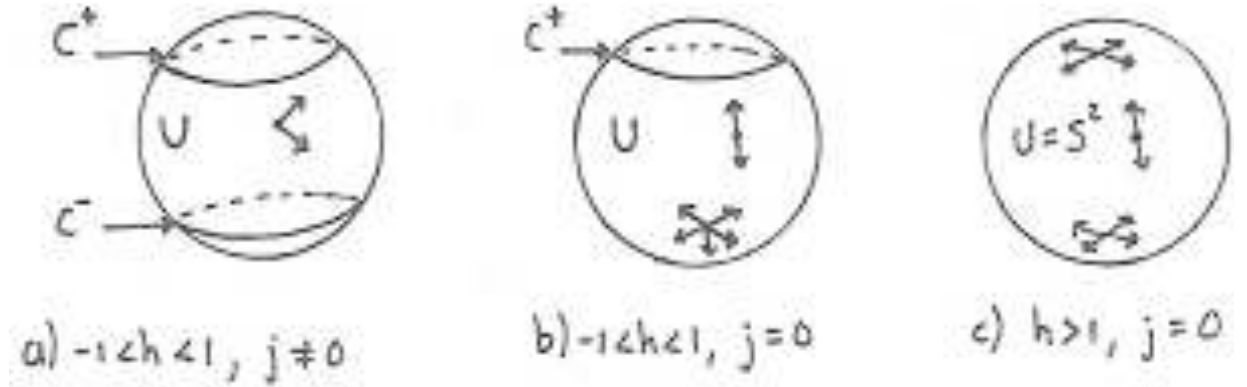


Figura 4.10: Descripción de $\mathcal{E}\mathcal{M}^{-1}(h, j)$ como un haz sobre U .

dicha expresión y dividiendo entre dos se tiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{\mathcal{B}^2(h)}{2} &= \frac{2}{81} \left(3 - h^2 + h\sqrt{h^2 + 3} \right)^2 \left(h + \sqrt{h^2 + 3} \right) \\
 &= \frac{2}{81} \left(3 - h^2 + h\sqrt{h^2 + 3} \right) \left[(3 - h^2 + h\sqrt{h^2 + 3})(h + \sqrt{h^2 + 3}) \right] \\
 &= \frac{2}{81} \left(3 - h^2 + h\sqrt{h^2 + 3} \right) (6h + 3\sqrt{h^2 + 3}) \\
 &= \frac{2}{27} \left(3 - h^2 + h\sqrt{h^2 + 3} \right) (2h + \sqrt{h^2 + 3}) = \max P(x_3).
 \end{aligned}$$

Dado que por hipótesis se tiene que $|j| < \mathcal{B}(h)$ entonces en particular se tiene que

$$\frac{1}{2}j^2 < \frac{\mathcal{B}^2(h)}{2}. \quad \blacksquare$$

Caso $j \neq 0$. En lo que sigue consideremos el caso $j \neq 0$. Entonces el intervalo $[x_3^-, x_3^+]$ está propiamente contenido en $[-1, 1]$. Por lo tanto U es la región anular cerrada de S^2 acotada por dos círculos; C^+ si $x_3 = x_3^+$ y C^- si $x_3 = x_3^-$. Ver figura 4.10. Dado que nuestro objetivo es ver a $\mathcal{E}\mathcal{M}^{-1}(h, j)$ como un haz sobre U , debemos determinar la fibra $\pi_{TS^2}^{-1}(x) \in \mathcal{E}\mathcal{M}^{-1}(h, j)$ para las $x \in U$.

Si se tiene la igualdad en (4.28) entonces $x_3 = x_3^-$ ó $x_3 = x_3^+$. Esto es, x está sobre la frontera ∂U de U . En este caso $y_3 = 0$ y por lo tanto y debe ser

igual a y^0 . Entonces la fibra $\mathcal{EM}^{-1}(x, y)$ sobre $x \in \partial U$ es un simple vector y^0 cuya tercera componente es nula. Por otro lado se tiene que si x es un punto interior de U , es decir $x \in U \setminus \partial U$, entonces la fibra de la proyección π_{TS^2} consiste de dos puntos, pues de la expresión (4.29) se tiene que $y_3^2 > 0$.

Lo siguiente que haremos es mostrar que $\mathcal{EM}^{-1}(h, j)$ es homeomorfa al **toro** T^2 . Sean las funciones $\Psi_{\pm}$ definidas de la siguiente manera:

$$\Psi_{\pm} : S^1 \times [x_3^-, x_3^+] \rightarrow \mathcal{EM}^{-1}(h, j)$$

$$(\theta, x_3) \mapsto (\bar{x}_1(\theta, x_3), \bar{x}_2(\theta, x_3), \bar{x}_3(\theta, x_3), \bar{y}_1(\theta, x_3), \bar{y}_2(\theta, x_3), \pm \bar{y}_3(\theta, x_3)),$$

donde:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1(\theta, x_3) &= \sqrt{1 - x_3^2} \cos \theta \\ \bar{x}_2(\theta, x_3) &= \sqrt{1 - x_3^2} \sin \theta \\ \bar{x}_3(\theta, x_3) &= x_3 \\ \bar{y}_1(\theta, x_3) &= -\frac{j \sin \theta \pm x_3 \bar{y}_3(\theta, x_3) \cos \theta}{\sqrt{1 - x_3^2}} \\ \bar{y}_2(\theta, x_3) &= -\frac{-j \cos \theta \pm x_3 \bar{y}_3(\theta, x_3) \sin \theta}{\sqrt{1 - x_3^2}} \\ \bar{y}_3(\theta, x_3) &= \sqrt{2(h - x_3)(1 - x_3^2) - j^2}. \end{aligned}$$

Es claro que $\text{im } \psi_+ \cup \text{im } \psi_- = \mathcal{EM}^{-1}(h, j)$. También es claro que si x está en la frontera de U el vector velocidad y se reduce al vector velocidad y^0 dado anteriormente y, en la frontera $S^1 \times \{x_3^-, x_3^+\}$ las imagenes bajo ψ_+ y ψ_- de un punto en dicha frontera son las mismas, es decir, $\Psi_+(\theta, x_3^{\pm}) = \Psi_-(\theta, x_3^{\pm})$ para todo $\theta \in S^1$. Geométricamente se tiene que $\mathcal{EM}^{-1}(h, j)$ consiste de dos cilindros que se intersectan en la frontera. Por lo tanto obtenemos finalmente el toro. Ver dibujo 4.11.

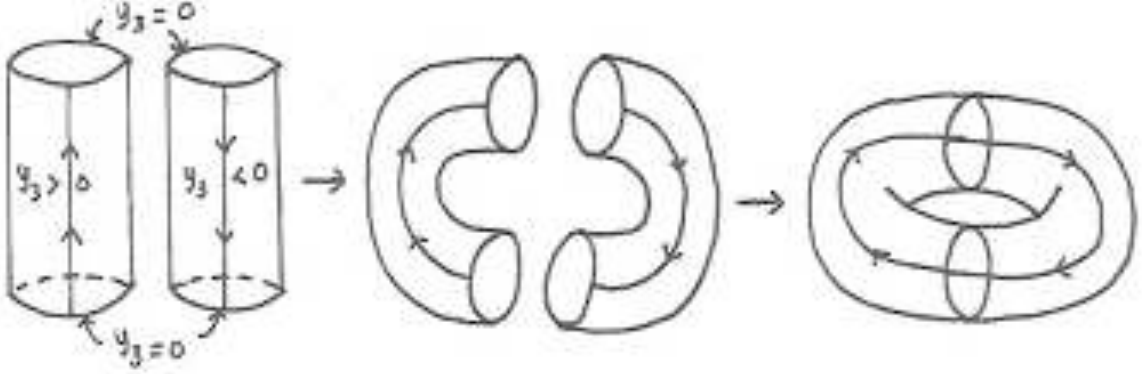


Figura 4.11: Construcción de T^2 con $j \neq 0$ y $-1 < h < 1$.

Observación. Las funciones $\Psi_{\pm}$ se pueden interpretar como secciones globales de la función π_{TS^2} . En efecto, si definimos los homeomorfismos $\sigma_{\pm} : U \subset S^2 \longrightarrow S^1 \times [x_3^-, x_3^+]$ de la siguiente manera:

$$\sigma_{\pm} : (\pm \sqrt{1 - x_3^2} \cos \theta, \pm \sqrt{1 - x_3^2} \sin \theta, x_3) \mapsto (\theta, x_3),$$

entonces $\Psi_+ \circ \sigma_+$ y $\Psi_- \circ \sigma_-$ son secciones globales de π_{TS^2} , es decir, $\pi_{TS^2} \circ \Psi_{\pm} \circ \sigma_{\pm} = id|_U$.

Caso $j = 0$, $-1 < h < 1$. En este caso el intervalo $[x_3^-, x_3^+]$ es justamente el intervalo $[-1, h]$ (Ver figura 4.9). Entonces U es la región cerrada de S^2 la cuál esta acotada por el círculo C^+ donde justamente $x_3 = h$, es decir, $x_1^2 + x_2^2 = 1 - h^2$ y contiene al polo sur. Ver figura 4.10. Utilizando la expresión (4.29) se tiene que $y_3 = 0$ si $x_3 = h$, i.e. $x \in \partial U$, y entonces el vector y dado por la ecuación (4.26) viene expresada por $y = (0, 0, 0)$. Por lo tanto la fibra de proyección π_{TS^2} en un punto de la frontera de U consiste en un punto. Por otro lado, si x está en el interior de U excepto el punto $(0, 0, -1)$ entonces la fibra de proyección π_{TS^2} consiste de

dos puntos, donde el vector y viene dado por:

$$y = \left(\pm \frac{x_1 x_3 y_3^{(h, x_3)}}{1 - x_3^2}, \pm \frac{x_2 x_3 y_3^{(h, x_3)}}{1 - x_3^2}, \pm y_3^{(h, x_3)} \right),$$

donde $y_3^{(h, x_3)} := \sqrt{2(h - x_3)(1 - x_3^2)}$.

Si $x_3 = -1$ entonces por la igualdad en (4.29) se tiene que $y_3 = 0$ y por la tercera ecuación de (4.23) se tiene que $y_1^2 + y_2^2 = 2(h + 1)$. Por lo tanto, $\pi_{TS^2}^{-1}(0, 0, -1)$ es un círculo en $T_{(0,0,-1)}S^2$ de radio $\sqrt{2(h + 1)}$.

Lo siguiente es mostrar que $\mathcal{EM}^{-1}(h, j)$ es homeomorfa a T^2 . La construcción de este homeomorfismo será similar al caso anterior.

Sean las funciones $\Psi_{\pm} : S^1 \times [-1, h] \rightarrow \mathcal{EM}^{-1}(h, j)$ definidas de la siguiente manera:

$$\Psi_{\pm}(\theta, x_3) = \begin{cases} (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \pm \bar{y}_1, \pm \bar{y}_2, \pm \bar{y}_3) & \text{si } x_3 \in (-1, h] \\ (0, 0, -1, \pm \sqrt{2(h + 1)} \cos \theta, \pm \sqrt{2(h + 1)} \sin \theta, 0) & \text{si } x_3 = -1 \end{cases},$$

donde:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1(\theta, x_3) &= \sqrt{1 - x_3^2} \cos \theta \\ \bar{x}_2(\theta, x_3) &= \sqrt{1 - x_3^2} \sin \theta \\ \bar{x}_3(\theta, x_3) &= x_3 \\ \bar{y}_1(\theta, x_3) &= -\frac{\sqrt{1 - x_3^2} \cos \theta x_3 \bar{y}_3(\theta, x_3)}{1 - x_3^2} = -x_3 \sqrt{2(h - x_3)} \cos \theta \\ \bar{y}_2(\theta, x_3) &= -\frac{\sqrt{1 - x_3^2} \sin \theta x_3 \bar{y}_3(\theta, x_3)}{1 - x_3^2} = -x_3 \sqrt{2(h - x_3)} \sin \theta \\ \bar{y}_3(\theta, x_3) &= \sqrt{2(h - x_3)(1 - x_3^2)}. \end{aligned}$$

De nuevo es claro que $\text{im } \psi_+ \cup \text{im } \psi_- = \mathcal{EM}^{-1}(h, j)$. Si $x_3 = h$, es decir, $x \in C^+$

entonces:

$$\Psi_+(\theta, h) = (\sqrt{1-h^2} \cos \theta, \sqrt{1-h^2} \sin \theta, h, 0, 0, 0)$$

y

$$\Psi_-(\phi, h) = (\sqrt{1-h^2} \cos \phi, \sqrt{1-h^2} \sin \phi, h, 0, 0, 0).$$

Entonces $\Psi_+(\theta, h) = \Psi_-(\phi, h)$ si $\theta = \phi$ para toda $\theta \in S^1$.

Por otro lado, si $x_3 = -1$ entonces

$$\Psi_+(\theta, -1) = (0, 0, -1, \sqrt{2(h+1)} \cos \theta, \sqrt{2(h+1)} \sin \theta, 0)$$

y

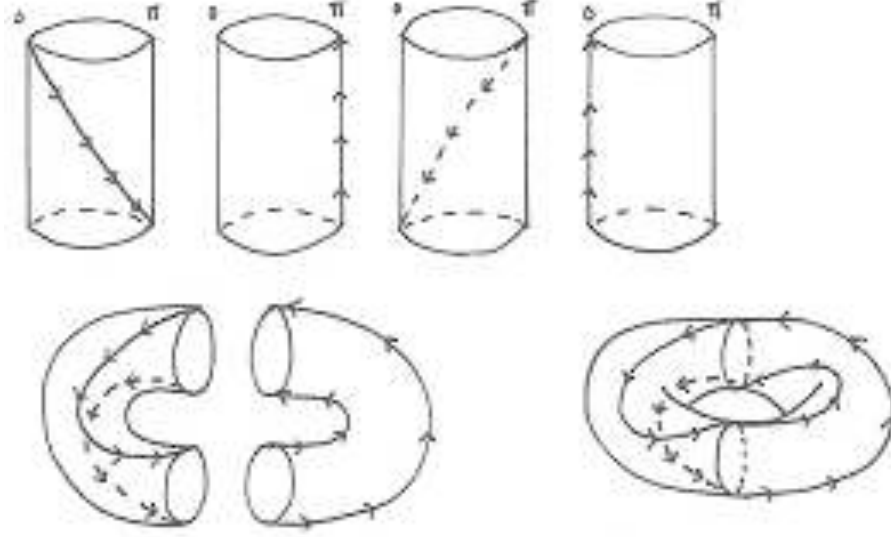
$$\Psi_-(\phi, -1) = (0, 0, -1, -\sqrt{2(h+1)} \cos \phi, \sqrt{2(h+1)} \sin \phi, 0).$$

Entonces $\Psi_+(\theta, -1) = \Psi_-(\phi, -1)$ si

$$\cos \theta = -\cos \phi$$

$$\sin \theta = -\sin \phi.$$

Ambas condiciones se satisfacen si $\theta = \phi + \pi$. Entonces geoméricamente hemos encontrado de nuevo que $\mathcal{EM}^{-1}(h, j)$ es la intersección de dos cilindros, excepto que en este caso, en la frontera inferior nosotros debemos *torcer* uno de los cilindros un ángulo π para poder identificar los puntos. Por lo tanto habiendo hecho la identificación de los puntos en la frontera de ambos cilindros podemos pegarlos y obtener el toro T^2 tal como lo deseabamos. Para una mayor ilustración de este caso, nosotros dibujamos una trayectoria de la dinámica sobre este toro. Ver figura 4.12.

Figura 4.12: Construcción de T^2 con $j = 0$ y $-1 < h < 1$.

Caso $j = 0$ y $h > 1$. En este caso el intervalo $[x_3^-, x_3^+]$ es justamente el intervalo $[-1, 1]$ (ver figura 4.9). Entonces $U = S^2$. Si $x \in U \setminus \{(0, 0, \pm 1)\}$ entonces $\pi_{TS^2}^{-1}(x)$ son dos vectores de signos opuestos distintos de cero, las cuales vienen dadas por:

$$y = \left(\pm \frac{x_1 x_3 y_3^{(h, x_3)}}{1 - x_3^2}, \pm \frac{x_2 x_3 y_3^{(h, x_3)}}{1 - x_3^2}, \pm y_3^{(h, x_3)} \right),$$

donde $y_3^{(h, x_3)} := \sqrt{2(h - x_3)(1 - x_3^2)}$. Por otro lado, si $x = (0, 0, -1)$ entonces la fibra $\pi_{TS^2}^{-1}(x)$ es el círculo C^- dado por $y_1^2 + y_2^2 = 2(h + 1)$, y si $x = (0, 0, 1)$ entonces la fibra $\pi_{TS^2}^{-1}(x)$ es el círculo C^+ dado por $y_1^2 + y_2^2 = 2(h - 1)$. Esto completa la descripción de $\mathcal{EM}^{-1}(h, j)$ como un haz sobre U .

De nuevo vamos a mostrar que también en este caso se tiene que $\mathcal{EM}^{-1}(h, j)$ es homeomorfa a T^2 . Sean las funciones $\Psi_{\pm} : S^1 \times [-1, 1] \rightarrow \mathcal{EM}^{-1}(h, j)$ definidas

de la siguiente forma:

$$\Psi_{\pm}(\theta, x_3) = \left\{ \begin{array}{ll} (0, 0, 1, \mp \sqrt{2(h-1)} \cos \theta, \mp \sqrt{2(h-1)} \sin \theta, 0) & \text{si } x_3 = 1 \\ (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \pm \bar{y}_1, \pm \bar{y}_2, \pm \bar{y}_3) & \text{si } x_3 \in (-1, 1) \\ (0, 0, -1, \pm \sqrt{2(h+1)} \cos \theta, \pm \sqrt{2(h+1)} \sin \theta, 0) & \text{si } x_3 = -1 \end{array} \right\},$$

donde:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1(\theta, x_3) &= \sqrt{1 - x_3^2} \cos \theta \\ \bar{x}_2(\theta, x_3) &= \sqrt{1 - x_3^2} \sin \theta \\ \bar{x}_3(\theta, x_3) &= x_3 \\ \bar{y}_1(\theta, x_3) &= -\frac{\sqrt{1 - x_3^2} \cos \theta x_3 \bar{y}_3(\theta, x_3)}{1 - x_3^2} = -x_3 \sqrt{2(h - x_3)} \cos \theta \\ \bar{y}_2(\theta, x_3) &= -\frac{\sqrt{1 - x_3^2} \sin \theta x_3 \bar{y}_3(\theta, x_3)}{1 - x_3^2} = -x_3 \sqrt{2(h - x_3)} \sin \theta \\ \bar{y}_3(\theta, x_3) &= \sqrt{2(h - x_3)(1 - x_3^2)}. \end{aligned}$$

En este caso tanto en la función Ψ_+ como en la función Ψ_- estamos dando explícitamente quienes son las imagenes de la frontera del cilindro $S^1 \times [-1, 1]$, es claro también que $\text{im } \psi_+ \cup \text{im } \psi_- = \mathcal{EM}^{-1}(h, j)$ y, lo único que resta por demostrar es que hagamos la identificación de los puntos de la frontera para poder construir el toro. Si $x_3 = 1$ entonces

$$\Psi_+(\theta, 1) = (0, 0, 1, -\sqrt{2(h-1)} \cos \theta, -\sqrt{2(h-1)} \sin \theta, 0)$$

y

$$\Psi_-(\phi, 1) = (0, 0, 1, \sqrt{2(h-1)} \cos \phi, \sqrt{2(h-1)} \sin \phi, 0).$$

Como $h > 1$ entonces es claro que $\Psi_+(\theta, 1) = \Psi_-(\phi, 1)$ si

$$-\cos \theta = \cos \phi$$

$$-\operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen} \phi.$$

Ambas condiciones se satisfacen si $\theta = \phi + \pi$.

Por otro lado, si $x_3 = -1$ entonces

$$\Psi_+(\theta, -1) = (0, 0, -1, \sqrt{2(h+1)} \cos \theta, \sqrt{2(h+1)} \operatorname{sen} \theta, 0)$$

y

$$\Psi_-(\phi, -1) = (0, 0, -1, -\sqrt{2(h+1)} \cos \phi, -\sqrt{2(h+1)} \operatorname{sen} \phi, 0).$$

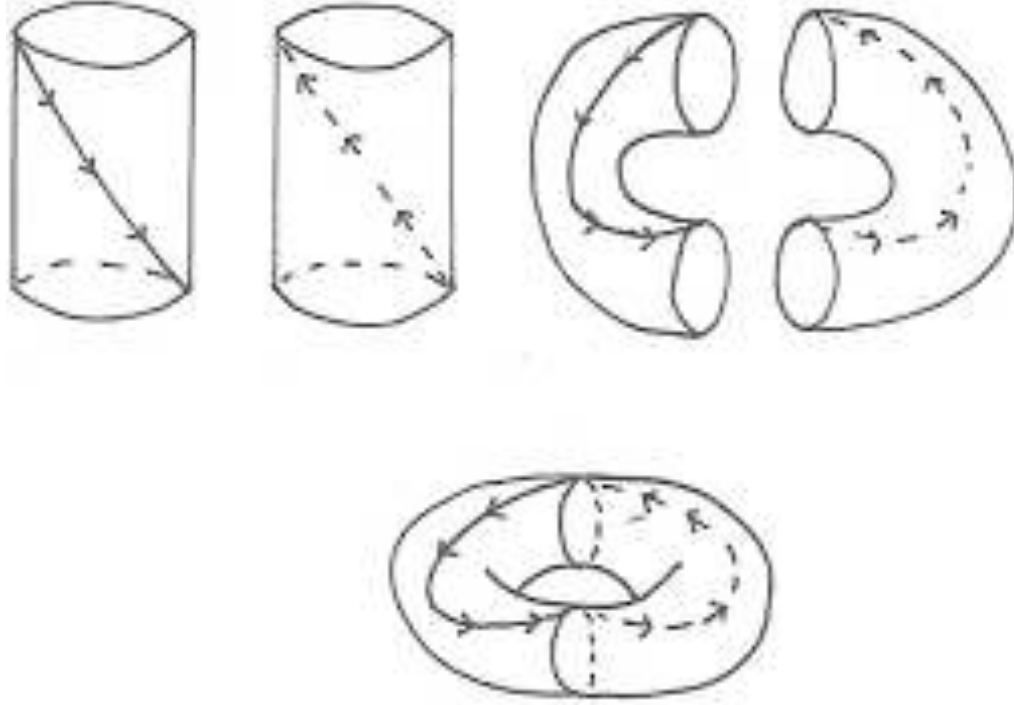
Como $h > 1$ entonces es claro que $\Psi_+(\theta, -1) = \Psi_-(\phi, -1)$ si

$$\cos \theta = -\cos \phi$$

$$\operatorname{sen} \theta = -\operatorname{sen} \phi.$$

De nueva cuenta, ambas condiciones se satisfacen si $\theta = \phi + \pi$. Entonces geométicamente hemos mostrado de nuevo que $\mathcal{EM}^{-1}(h, j)$ es la intersección de dos cilindros, y que a diferencia de los dos casos anteriores nosotros tenemos que rotar uno de los cilindros un ángulo π . Por lo tanto obtenemos el toro. Para una mayor ilustración de este caso dibujamos una trayectoria de la dinámica en el toro. Ver figura 4.13.

4. Por demostrar que si $(h, j) = (1, 0)$ entonces la fibra de la función $\mathcal{EM}(h, j)$ es T^* , donde T^* es un toro T^2 con un círculo longitudinal pinchado en un punto.

Figura 4.13: Construcción de T^2 con $j = 0$ y $h > 1$.

Al ser $h = 1$ se tiene que $x_3 = 1$ es una raíz doble del polinomio $P(x_3)$ dado por (4.30), además de la ecuación (4.29) se tiene que $y_3 = \pm\sqrt{2(1-x_3)(1-x_3^2)}$. Sea

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{1-x_3^2} \cos(\theta) \\ x_2 &= \sqrt{1-x_3^2} \sin(\theta), \end{aligned} \tag{4.31}$$

donde por supuesto se tiene que $x_1^2 + x_2^2 = 1 - x_3^2$. Entonces sustituyendo (4.31) en (4.25) se tiene

$$\begin{aligned} y_1 &= -\frac{1}{1-x_3^2} (\sqrt{1-x_3^2} \cos(\theta) x_3 y_3) \\ y_2 &= -\frac{1}{1-x_3^2} (\sqrt{1-x_3^2} \sin(\theta) x_3 y_3) \end{aligned} \tag{4.32}$$

Si $x_3 \neq \pm 1$ entonces las ecuaciones para y_1, y_2 dadas en (4.32) se reducen a

$$\begin{aligned} y_1 &= \pm x_3 \cos(\theta) \sqrt{2(1-x_3)} \\ y_2 &= \pm x_3 \sin(\theta) \sqrt{2(1-x_3)}. \end{aligned}$$

Entonces si $x_3 \in (-1, 1)$ se tiene que $\pi_{TS^2}|_{\mathcal{EM}^{-1}(1,0)}$ es S^2 menos los polos. Este conjunto lo identificamos con el cilindro $S^1 \times (-1, 1)$.

Pero veamos que pasa en los polos. Para ver que ocurre en el polo norte, tomemos $\epsilon > 0$ suficientemente pequeña, y sea $x_3 = 1 - \epsilon$, entonces las ecuaciones (4.31) y (4.32) se transforman en:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{1 - (1 - \epsilon)^2} \cos(\theta) \\ x_2 &= \sqrt{1 - (1 - \epsilon)^2} \sin(\theta) \\ y_1 &= -\frac{1}{1 - (1 - \epsilon)^2} (\sqrt{\epsilon(2 - \epsilon)} \cos(\theta) (1 - \epsilon) y_3) \\ y_2 &= -\frac{1}{1 - (1 - \epsilon)^2} (\sqrt{\epsilon(2 - \epsilon)} \sin(\theta) (1 - \epsilon) y_3) \\ y_3 &= \pm \sqrt{2\epsilon^2(2 - \epsilon)}. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Tomando el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$ se tiene:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = (0, 0, 1, 0, 0, 0). \tag{4.34}$$

Ahora veamos que pasa en el polo sur, es decir tomamos $x_3 = -1 + \epsilon$, sustituyendo esta expresión en (4.31) y (4.32) y tomando el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$ se tiene:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = (0, 0, -1, 2 \cos(\theta), 2 \sin(\theta), 0). \tag{4.35}$$

Entonces hemos mostrado que la fibra sobre $x \in S^2 - (0, 0, \pm 1)$ consiste de dos

vectores de signos opuestos con tercera componente distinta de cero, mientras que la fibra sobre $x = (0, 0, -1)$ es el círculo C^- dado por $y_1^2 + y_2^2 = 4$, y la fibra sobre $x = (0, 0, 1)$ es el vector velocidad cero. Por lo tanto todos los puntos de $\mathcal{EM}^{-1}(1, 0)$ excepto el polo norte con vector de velocidad cero son regulares. Entonces $\mathcal{EM}^{-1}(1, 0)$ menos el polo norte con vector de velocidad cero es una variedad diferenciable la cual podemos identificar con la esfera menos los polos.

Geométricamente tomamos un círculo de radio $\epsilon > 0$ suficientemente pequeña cerca del polo norte y junto con el círculo C^- formamos un par de cilindros ($y_3 > 0, y_3 < 0$).

Lo siguiente que demostraremos es que cuando x es justamente el polo sur, entonces los cilindros se pegan de manera suave. Dado la función de energía momento en (4.1) la derivada de esta función es:

$$(\mathbf{D}(\mathcal{EM}))|_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & y_1 & y_2 & y_3 \\ y_2 & -y_1 & 0 & -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $(x, y) \in \mathcal{EM}^{-1}(1, 0)$ y $-1 < x_3 < 1$ entonces la derivada de la función $\mathcal{EM}$ tiene rango máximo, pues al menos x_1 o x_2 es distinto de cero y por lo tanto se tienen dos renglones linealmente independientes. Si $x_3 = -1$ entonces la derivada de la función de energía momento viene dada por:

$$(\mathbf{D}(\mathcal{EM}))|_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2\cos(\theta) & 2\sin(\theta) & 0 \\ 2\cos(\theta) & 2\sin(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De nuevo se observa que ambos renglones son linealmente independientes y por lo tanto tienen rango máximo también cuando x es justamente el polo sur. Por lo tanto hemos mostrado que en dicho punto, es decir, en el polo sur, los cilindros se

pegan de manera suave. ■

4.4. Topología de $(H|TS^2)^{-1}(h)$

Lo primero que haremos, es demostrar que la función $H|TS^2$ es una función de Morse, es decir, por la definición 1.23 necesitamos mostrar que el conjunto de puntos críticos de $H|TS^2$ es no degenerado.

Como una subvariedad de $T\mathbb{R}^3$ con coordenadas (x, y) , la subvariedad TS^2 se construyó como la imagen inversa del valor regular cero de la función definida en (2.6), es decir, $TS^2 = \mathcal{C}^{-1}(0)$ donde

$$\mathcal{C} : T_0\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (c_1(x, y), c_2(x, y)),$$

y

$$c_1 : T_0\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \langle x, x \rangle - 1$$

$$c_2 : T_0\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle.$$

Sobre $T\mathbb{R}^3$ consideremos la siguiente función:

$$H : T\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + x_3. \quad (4.36)$$

Utilizando multiplicadores de Lagrange definido en (1.6), la función $H|TS^2$ tiene un punto crítico $p = (x_0, y_0)$ si este punto satisface:

$$[DH(x, y) + \lambda_1 Dc_1(x, y) + \lambda_2 Dc_2(x, y)]|_{(x_0, y_0)} = 0. \quad (4.37)$$

Calculando cada uno de los términos de la ecuación (4.37) se tiene

$$\begin{aligned} DH &= (0, 0, 1, y_1, y_2, y_3) \\ Dc_1 &= (2x_1, 2x_2, 2x_3, 0, 0, 0) \\ Dc_2 &= (y_1, y_2, y_3, x_1, x_2, x_3). \end{aligned} \tag{4.38}$$

Sustituyendo, desarrollando e igualando entrada a entrada cada uno de estos términos en la ecuación (4.37) se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 x_1 + \lambda_2 y_1 &= 0, & y_1 + \lambda_2 x_1 &= 0, \\ 2\lambda_1 x_2 + \lambda_2 y_2 &= 0, & y_2 + \lambda_2 x_2 &= 0, \\ 1 + 2\lambda_1 x_3 + \lambda_2 y_3 &= 0, & y_3 + \lambda_2 x_3 &= 0, . \end{aligned} \tag{4.39}$$

Tomando el conjunto de ecuaciones del lado derecho de (4.39), multiplicando por x_1 la primera ecuación, por x_2 la segunda ecuación, por x_3 la última ecuación y sumando todas estas ecuaciones se obtiene:

$$\begin{aligned} 0 &= (x_1 y_1 + \lambda_2 x_1^2) + (x_2 y_2 + \lambda_2 x_2^2) + (x_3 y_3 + \lambda_2 x_3^2) \\ &= (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) + \lambda_2 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = \lambda_2 \end{aligned} \tag{4.40}$$

Como $\lambda_2 = 0$ se tiene entonces que $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ para que se satisfaga el conjunto ecuaciones del lado derecho de (4.39).

Tomando $\lambda_2 = 0$ y suponiendo por un momento que $\lambda_1 = 0$, en la tercera igualdad del lado izquierdo de (4.39) tenemos $0 = 1$ lo cual no puede ocurrir. Por lo tanto $\lambda_1 \neq 0$ y entonces las dos primeras ecuaciones del lado izquierdo de (4.39) se tiene que $x_1 = x_2 = 0$. Entonces sustituyendo $x_3 = \pm 1$ en la tercera ecuación del lado izquierdo de (4.39) se tiene $\lambda_1 = \pm \frac{1}{2}$.

Por lo tanto $H|TS^2$ tiene solamente dos puntos críticos $\pm p = (0, 0, \pm 1, 0, 0, 0)$ con multiplicadores de Lagrange $\lambda_1 = \pm \frac{1}{2}, \lambda_2 = 0$. Lo siguiente es mostrar que estos dos puntos son no degenerados.

Por la proposición 1.31, el espacio tangente $T_{(\pm p)}TS^2$ a TS^2 en $(\pm p)$ está dada por

$$\ker \begin{pmatrix} Dc_1(\pm p) \\ Dc_2(\pm p) \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

el cual es generado por los vectores $\{e_1, e_2, e_4, e_5\}$, siendo e_i con $i = 1, \dots, 6$ una base para $T\mathbb{R}^3$. Dicho de otro modo, el espacio tangente $T_{(\pm p)}TS^2$ a TS^2 en $(\pm p)$ es la imagen de la matriz

$$T_{(\pm p)}TS^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para comprobar que los puntos críticos $\pm p$ son no degenerados necesitamos calcular las segundas derivadas de cada uno de los términos de (4.38) para poder aplicar

(1.7). Entonces cada una de las segundas derivadas de (4.38) viene dado por

$$D^2H(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$D^2c_1(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dado que $\lambda_2 = 0$ no necesitamos calcular $D^2c_2(x, y)$, además se puede ver que las matrices anteriores (segundas derivadas de H y c_1 respectivamente) no dependerán de los puntos críticos, lo único que tenemos por demostrar, es que el Hessiano de $H|_{TS^2}$ es invertible.

Lema 4.22. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y B la forma bilineal asociada a este espacio vectorial, es decir, $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$. Sean β_1 y β_2 bases de V y P la matriz de transición de la base β_1 a la base β_2 . Si A es la matriz de B en la base β_1 y la cual denotaremos como $[A]_{\beta_1}$, entonces $[A]_{\beta_2} = P^T[A]_{\beta_1}P$ es la matriz de B en la base β_2 .*

Prueba. Éste es un resultado estandar de álgebra lineal; véase e.g. [9]. ■

Utilizando el lema anterior mostraremos que el Hessiano de $H|_{TS^2}$, el cual es por supuesto una forma bilineal, evaluada en los puntos críticos es invertible. Sea $\beta_1 = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$ la base canónica de $\mathbb{R}^6 \approx T\mathbb{R}^3$ y sea $\beta_2 = (e_1, e_2, e_4, e_5, e_3, e_6)$ otra base de $\mathbb{R}^6$. Podemos observar que los primeros cuatro vectores de la base β_2 generan precisamente el espacio tangente $T_{(\pm p)}TS^2$ a TS^2 en $(\pm p)$ y lo único que hemos hecho es extender esta base a una base de $\mathbb{R}^6$. Entonces P que es la matriz de transición viene dada por

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sea $B = D^2H(x, y) + \lambda_1 D^2c_1(x, y)$ (recordemos que $\lambda_2 = 0$) la forma bilineal. Entonces la matriz A asociada a la forma bilineal B en la base β_1 tiene la siguiente forma:

$$[\mathbf{A}]_{\beta_1} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por el lema 4.22 la matriz $[A]_{\beta_2}$ viene dada explícitamente por:

$$([A]_{\beta_2}) =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
= \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$D^2H(x, y) + \lambda_1 D^2c_1(x, y)|_{TS^2} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es una matriz invertible y por lo tanto los puntos críticos $\pm p = (0, 0, \pm 1, 0, 0, 0) \in TS^2$ son puntos críticos no degenerados y $H|_{TS^2}$ es una función de Morse.

El punto $(-p) = (0, 0, -1, 0, 0, 0) \in TS^2$ representa un mínimo de H con valor crítico $H(-p) = -1$ (El índice de Morse es cero).

El punto $(+p) = (0, 0, 1, 0, 0, 0) \in TS^2$ representa un punto silla de H con valor crítico $H(+p) = 1$ (El índice de Morse es dos).

Proposición 4.23. *La topología de las superficies de energía $(H|TS^2)^{-1}(h)$ del péndulo esférico son las siguientes:*

Condición sobre h	Topología de $(H TS^2)^{-1}(h)$
1. $h = -1$	Un punto
2. $-1 < h < 1$	S^3
3. $h = 1$	$\cup$ El haz de la esfera unitaria tangente a S^2 con una fibra pinchada en un punto
4. $h > 1$	$\mathbb{RP}^3$ El espacio proyectivo real de dimensión 3

Prueba. 1. Por definición

$$(H|TS^2)^{-1}(-1) = \{(x, y) \in TS^2 : \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + x_3 = -1\}$$

La ecuación $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = -2(1 + x_3) \geq 0$ se satisface si y solo si $x_3 \leq -1$, como $x_3 \in TS^2$ entonces $x_3 = -1$ y $x_1 = 0 = x_2$, y por lo tanto $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0$ si y solo si $y_1 = y_2 = y_3 = 0$. Entonces $(H|TS^2)^{-1}(-1) = (0, 0 - 1, 0, 0, 0)$, el cuál es un punto.

2. Queremos demostrar que la topología de la fibra $(H|TS^2)^{-1}(h)$ con $-1 < h < 1$ es difeomorfa a S^3 . Primero vamos a demostrar, usando el lema de Morse, que para valores de h ligeramente mayores que el valor mínimo -1, el conjunto de nivel de $(H|TS^2)^{-1}(-1) \cap U_{p_-}$ es difeomorfo a una esfera de dimensión 3 y el cual se denota como S^3 . Aquí U_{p_-} es una vecindad alrededor de p_- .

Sea

$$\begin{aligned} \bar{H}_1(x, y) &:= H_1(x, y)|TS^2 \\ &= (H(x, y) + 1)|TS^2 = \left(\frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + x_3 + 1\right)|TS^2. \end{aligned} \tag{4.41}$$

Entonces los puntos críticos no degenerados de $H|TS^2$ son tambien puntos críticos no degenerados de $\bar{H}_1$. La función $\bar{H}_1$ satisface las hipótesis del lema de Morse (ver proposición 1.27) y entonces hay un conjunto abierto $U \subseteq T\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$ con $(-p) \in U$ y un difeomorfismo $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^4$ con $\varphi(-p) = 0$ tal que $\bar{H}_1 \circ \varphi^{-1}(\xi, \eta) = \frac{1}{2}D^2\bar{H}_1(-p)((\xi, \eta), (\xi, \eta))$ para toda $(\xi, \eta) \in \varphi(U)$. Entonces queremos demostrar que una vecindad del punto $-p$, dada una $\epsilon > 0$ suficientemente pequeña se tiene que $(\bar{H}_1)^{-1}(\epsilon) \cap U_{-p}$ es difeomorfo a S^3 .

Por definición

$$\begin{aligned} (\bar{H}_1 \circ \varphi^{-1})^{-1}(\epsilon) &= \{(\xi, \eta) \in \varphi(U) : \bar{H}_1 \circ \varphi^{-1}(\xi, \eta) = \epsilon\} \\ &= \{(\xi, \eta) \in \varphi(U) : \frac{1}{2}D^2\bar{H}_1(-p)((\xi, \eta), (\xi, \eta)) = \epsilon\} \end{aligned} \quad (4.42)$$

Calculando $D^2\bar{H}_1(-p)((\xi, \eta), (\xi, \eta))$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2.$$

Entonces

$$(\bar{H}_1 \circ \varphi^{-1})^{-1}(\epsilon) = \{(\xi, \eta) \in \varphi(U) : \xi_1^2 + \xi_2^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 = 2\epsilon\}$$

Por la proposición 1.28 tenemos que $\varphi(\bar{H}_1^{-1}(\epsilon) \cap U_{-p}) = (\bar{H}_1 \circ \varphi^{-1})^{-1}(\epsilon)$ y dado que φ es un difeomorfismo entonces se tiene que $\bar{H}_1^{-1}(\epsilon) \cap U_{-p}$ es difeomorfo a la esfera S^3 . Pero también se tiene que $\bar{H}_1^{-1}(\epsilon) \cap U_{-p}$ es difeomorfa a $(H|TS^2)^{-1}(-1+\epsilon) \cap U_{-p}$. Por lo tanto $(H|TS^2)^{-1}(-1+\epsilon) \cap U_{-p}$ es difeomorfa a la esfera S^3 .

Observación. Podemos escoger U_{-p} de tal forma que si $(x, y) \in U_{-p} \subseteq T_{-p}S^2$ entonces $-1 \leq x_3 < -1 + \epsilon$ y $\|y^2\| < 2\epsilon$, para alguna $\epsilon > 0$. Se sigue que $x_i^2 < 2\epsilon$, $i = 1, 2$.

Usando el Lema de isotopía de Morse (ver proposición 1.30) se sigue que el conjunto de nivel $(H|TS^2)^{-1}(h)$ es difeomorfo a S^3 para toda $h \in (-1, 1)$, esto es, $(H|TS^2)^{-1}(-1 + \epsilon)$ es suavemente isotópica a $(H|TS^2)^{-1}(1 - \epsilon)$. Esto concluye la demostración para el caso 2.

4. A continuación mostraremos que para $h > 1$, $(H|TS^2)^{-1}(h)$ es difeomorfo a $\mathbb{RP}^3$. La demostración va a ser una composición de difeomorfismos. Mostraremos primero que $(H|TS^2)^{-1}(h)$ es difeomorfo a T_1S^2 (el **haz circular unitario tangente a S^2**), que este a su vez es difeomorfo a $SO(3)$ y que este último es difeomorfo a $\mathbb{RP}^3$, el espacio proyectivo real de dimensión 3.

Sea φ la siguiente función suave

$$\varphi : (H|TS^2)^{-1}(h) \rightarrow T_1S^2 : (x, y) \mapsto \left(x, \frac{y}{\sqrt{2h - 2x_3}}\right) = (\xi, \eta). \quad (4.43)$$

Dado que $h > 1$ entonces $h - x_3 > 0$ para toda $x_3 \in [-1, 1]$. El conjunto de nivel $(H|TS^2)^{-1}(h) \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ se define por

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle &= 1 \quad , \quad \langle x, y \rangle = 0 \\ h &= \frac{1}{2} \langle y, y \rangle + \langle x, e_3 \rangle. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Para toda $(\xi, \eta) \in \varphi((H|TS^2)^{-1}(h))$ se satisfacen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}\langle \xi, \xi \rangle &= \langle x, x \rangle = 1, \\ \langle \xi, \eta \rangle &= \left\langle x, \frac{y}{\sqrt{2(h-x_3)}} \right\rangle = 0, \\ \langle \eta, \eta \rangle &= \left\langle \frac{y}{\sqrt{2(h-x_3)}}, \frac{y}{\sqrt{2(h-x_3)}} \right\rangle = 1.\end{aligned}\tag{4.45}$$

Por lo tanto la imagen de φ está en efecto contenida en T_1S^2 . Además, $(\xi, \eta) \rightarrow (\xi, \eta\sqrt{2h-2\xi_3})$ es una inversa suave de φ y entonces la función φ es un difeomorfismo.

Ahora T_1S^2 se puede ver como el conjunto de todos los pares ordenados de vectores ortonormales $\xi, \eta \in \mathbb{R}^3$. Extendiendo el par ordenado $\{\xi, \eta\}$ a una base ortonormal orientada positivamente (regla de la mano derecha) $\{\xi, \eta, \xi \times \eta\}$ de $\mathbb{R}^3$, se tiene que cada base puede ser identificada con una rotación propia de $\mathbb{R}^3$ representada por la matriz $(\xi, \eta, \xi \times \eta)$. (Aquí cada entrada representa la columna de la matriz.) Entonces la función

$$\psi : T_1S^2 \subseteq T\mathbb{R}^3 \rightarrow SO(3) \subseteq \mathbb{R}^9 : (\xi, \eta) \mapsto (\xi, \eta, \xi \times \eta)\tag{4.46}$$

es una función suave y donde

$$\begin{pmatrix} \xi & \eta & \xi \times \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2 \\ \xi_2 & \eta_2 & \xi_3\eta_1 - \xi_1\eta_3 \\ \xi_3 & \eta_3 & \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 \end{pmatrix}.$$

Si definimos la función inversa suave de ψ como

$$\sigma : SO(3) \rightarrow T_1S^2 : (\xi, \eta, \alpha) \rightarrow (\xi, \eta),$$

entonces T_1S^2 es difeomorfo a $SO(3)$.

Observación. Una demostración más completa de este hecho es ver que existe un isomorfismo del álgebra de Lie $(T_e(T_1S^2), [,])$ con el álgebra de Lie $(\mathbb{R}^3, \times)$. Ver Cushman [6, cap. 3, secc. 1.4].

Por último mostraremos que $SO(3)$ es difeomorfo a $\mathbb{RP}^3$, para ello seguiremos la demostración que da Marsden (ver [13, prop. 9.2.10]).

Mapeamos la bola unitaria $D_1^3 \subset \mathbb{R}^3$ a $SO(3)$ enviando (x_1, x_2, x_3) a una rotación alrededor de este punto a través de un ángulo $\pi\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}$, donde el elemento $(0, 0, 0)$ lo mandamos a la identidad. Esta función es suave y suprayectiva. La restricción al interior de D_1^3 es inyectiva. Sobre la frontera de D_1^3 , que denotamos por (∂D_1^3) , la función es 2 a 1. Por lo tanto induce una función biyectiva suave desde D_1^3 , con puntos antipodales sobre la frontera indentificados, de tal forma que la función inversa es suave. Entonces $SO(3)$ es difeomorfo a D_1^3 con puntos antipodales sobre la frontera indentificados.

La transformación $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_2, x_3, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2})$ es un difeomorfismo de D_1^3 con el hemisferio unitario superior de S^3 con puntos antipodales sobre el ecuador identificados. Este último espacio es difeomorfo a la esfera unitaria S^3 con puntos antipodales identificados, los cuales coinciden con el espacio de líneas de $\mathbb{R}^4$ que pasan por el origen, esto es, con $\mathbb{RP}^3$.

3. La última demostración es que si $h = 1$ entonces $(H|TS^2)^{-1}(1) = \mathbb{U}$, donde $\mathbb{U}$ es el haz circular unitario tangente a S^2 con una fibra pinchada en un punto.

Por definición

$$(H|TS^2)^{-1}(1) = \{(x, y) \in TS^2 : \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + x_3 = 1\}$$

Sea φ la siguiente función

$$\varphi : (H|TS^2)^{-1}(1) \rightarrow T_1S^2 : (x, y) \rightarrow \left(x, \frac{y}{\sqrt{2(1-x_3)}}\right)$$

Si $x_3 \neq 1$ entonces φ es una función diferenciable y cuya inversa está dada por

$$\psi : T_1S^2 \rightarrow (H|TS^2)^{-1}(1) : (\xi, \eta) \rightarrow (\xi, \eta\sqrt{2(1-\xi_3)})$$

Por lo tanto, si $x_3 \neq 1$, $(H|TS^2)^{-1}(1)$ es un difeomorfismo con el haz circular unitario tangente a S^2 .

Si $x_3 = 1$ entonces $y_1 = y_2 = y_3 = 0$. Entonces

$$(H|TS^2)^{-1}(1) = T_1S^2 \cup (0, 0, 1, 0, 0, 0) = \mathbb{U} \quad (4.47)$$

■

Capítulo 5

Conclusiones

En esta tesis hemos estudiado en detalle algunos aspectos en la literatura sobre sistemas mecánicos integrales y hemos visto como la geometría diferencial permite estudiar aspectos cualitativos de la dinámica de un sistema mecánico. En particular, hemos mostrado como la teoría de Morse nos permitió hacer un estudio geométrico cerca de los puntos críticos no degenerados de la función de energía-momento¹.

En cuanto a nuestro sistema mecánico, el péndulo esférico, hemos estudiado el argumento que muestra que efectivamente es un **sistema hamiltoniano completamente integrable**, pues existen dos cantidades conservadas ($2 = \dim TS^2/2$) llamadas la **energía** H y el **momento angular** J , las cuales bajo el paréntesis de Poisson están en involución, es decir, $\{H|TS^2, J|TS^2\} = 0$.

En esta tesis hemos también presentado al lector los aspectos básicos acerca de la reducción del espacio fase y la dinámica para el péndulo esférico, pero restringiéndonos únicamente a los resultados que necesitamos en capítulos posteriores. Un estudio detallado de la reducción de la dinámica hubiera requerido muchos

¹Cabe notar que en nuestro reporte de servicio social desarrollamos previamente una descripción bastante completa de la geometría del péndulo matemático (i.e. el péndulo plano), incluyendo la topología de las fibras de la función de energía, para lo cual también aplicamos la teoría de Morse cerca de puntos críticos no-degenerados.

resultados de geometría algebraica y topología algebraica que hemos dejado de lado.

En contraste, hemos estudiado en el capítulo 4 con detalle y de manera bastante completa la topología de las fibras de la función de energía-momento $\mathcal{E}\mathcal{M}$. En particular obtuvimos e ilustramos que para valores regulares de la función de energía-momento se tiene que la fibra de dichos valores regulares son difeomorfas al **toro**, T^2 . Este difeomorfismo es a veces conocido como el **Teorema de Arnold** y puede encontrarse en muchos textos de física teórica como puede ser en [12, 5.2.21] o en [6]. En este capítulo no solamente hemos dado la topología de las fibras para los valores regulares de $\mathcal{E}\mathcal{M}$ sino también para los valores críticos de dicha función. Tanto para los valores regulares como para los valores críticos la descripción de las respectivas topologías fue hecha en base a las topologías del hamiltoniano reducido $H_j : M_j \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, el cuál como se puede recordar es un sistema con un solo grado de libertad y donde M_j es una variedad semialgebraica. Por último describimos la topología de las fibras de la función $H|TS^2$. Cabe mencionar que el punto $(0, 0, 1, 0, 0, 0)$ (el polo norte) el cual es un punto crítico, fue el que mayor problema represento al tratar de describir dichas topologías.

Finalmente, podrá haber observado el lector que la parte de la introducción fue bastante larga, aún cuando en esta parte dimos las definiciones y proposiciones que simplemente necesitábamos. En este sentido la literatura es bastante extensa tanto en el área de las matemáticas como en la de física. Conviene volver a recordar que las definiciones y proposiciones aquí dadas, pueden ser extendidas a objetos matemáticos más complejos como pueden ser los haces vectoriales y los haces fibrados. Estos dos últimos objetos matemáticos son de mucho uso hoy en día para el estudio de temas como la relatividad, la mecánica cuántica o la teoría de Yang-Mills.

Bibliografía

- [1] Arms, J.M., Marsden, J.E. and Moncrief, V. Symmetry and Bifurcations of Momentum Mappings. *Commun. Math. Phys.* 78, 455–478, 1981.
- [2] Barden. D. and Thomas. C. *An Introduction to Differential Manifolds*. Imperial College Press., 2003.
- [3] Brickell. F- and Clark. R.S. *Differentiable Manifolds. An introduction*. Van Nostrand Reinhold Company, London VNR, 1970.
- [4] Bulajich. R. and Lopez de Medrano R.S. *Teoría de Singularidades. Una introducción elemental*. Aportaciones Matemáticas. Serie Comunicaciones, 1995.
- [5] Chruściński. D. and Jamiolkowski. A. *Geometric Phases in Classical and Quantum Mechanics*. Birkhäuser, Boston, 2004.
- [6] Cushman. R.H. and Bates. L.M. *Global Aspects of Classical Integrable Systems*. Birkhäuser, Boston, 1997.
- [7] Do Carmo. M. *Differential Geometry of Curves and Surfaces* . Prentice Hall, 1976.
- [8] Duistermaat, J.J. and Kolk, J.A.C. *Lie Groups*. Springer, 1999.
- [9] Friedberg. S.H. *Linear Algebra*. Prentice Hall, Englewood Cliffs., New Jersey, 1989.

- [10] Gidea. M. and Burns. K. *Differential Geometry and Topology*. Chapman & Hall, 2005.
- [11] Marsden. J.E. *Elementary Classical Analysis*. W. H. Freeman and Company.
- [12] Marsden. A. and Marsden. J.E. *Foundations of Mechanics*. The Benjamin Cummings Publishing Company, second edition, 1985.
- [13] Marsden. J.E. and Ratiu. T.S. *Introduction to Mechanics and Symmetry*. Springer, second edition, 1999.
- [14] Munkres, J.R. *Topology*. Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 2000.
- [15] Puta. M. *Hamiltonian Mechanical Systems and Geometric Quantization*. Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [16] Talpaert. Y. *Differential Geometry with Applications to Mechanics and Physics*. Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker Inc., N.Y., 2000.
- [17] Uspensky J.V. *Theory of Equations*. McGraw-Hill, 1958.
- [18] Weyl. H. *The classical groups*. Princeton University Press, Princeton, third edition, 1946.